目　　录

A.1. 引　言

对设计航空器或具有流动工质的机械的工程师来说，他所需要的资料是运动流体作用在一个特定物体或多个物体表面上的压力、切应力、温度及热通量矢；这些物体是处于在特定条件下流动着的流体之中的. 气体动力学的主要任务就在于提供这些资料. 除上述的资料外，再加上流体的速度矢和密度这两项资料，一般地认为有关流体状况的资料就齐全了. 所以在指定空间域内各点上，在指定时间范围内每一瞬间，上述各量一旦确定的话，那末气体动力学问题就算是完全解决了. 本编的目的在于系统地阐明一般问题，并提供作分析所需的诸方程.

不过在进行仔细分析以前，最好先计算一个在气体动力学中十分重要的量，那就是小扰动的传播速度. 这个速度常称为**声速**. 由于在流动流体中的物体对流体产生扰动，可以料到，流场的特性会在很大程度上决定于平均运动速度与声速之比. 事实上，仅根据这个比值就可以把流动问题划分为四类：一、亚声速流，即流体速度小于声速；二、跨声速流，即流体速度和声速差不多大小；三、超声速流，即流体速度大于声速；最后是高超声速流，即流体速度大大超过声速.

现在来计算小扰动的传播速度：考虑一从左向右的均匀流. 这流动越过一微弱突跃面，突跃面位置不动，于是流场是定常的，也就是说流场不随时间变化. 流体流过突跃面时，速度由 u 增为 $u+du$，密度由 ρ 增为 $\rho+d\rho$，压强由 p 增为 $p+dp$. 现在考虑一具有单位截面面积的流管. 在越过突跃面时，流体质量不能有所增减，故

$$\rho u=(\rho+d\rho)(u+du). \tag{1.1}$$

又越过突跃面时，动量的增量必为作用在流体上的压强增量所平

衡，故

$$(\rho + d\rho)(u + du)^2 - \rho u^2 = -dp. \tag{1.2}$$

若仅取一级微量，则从方程(1.1)和(1.2)得

$$u^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

显然，在一个和流体一起运动的观察者看来，流体是不动的，而扰动以速度 u 传播. 因此，u 确实就是小扰动的传播速度，也就是声速. 令声速为 a，则

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho}. \tag{1.3}$$

只要知道压强和密度之间的关系，就可以从方程(1.3)计算出声速. 不可压流体的声速是无限大，这是因为它的压強 p 可以变化，而 ρ 不能变的缘故. 由于扰动传播不能产生或消灭能量，所以这个传播过程必是绝热的. 事实上，一种特有的压強-密度关系是等熵关系. 对于完全气体来说，即对于成分分子间的相互作用可以完全忽略的气体来说，压強对密度的变化率是

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}, \tag{1.4}$$

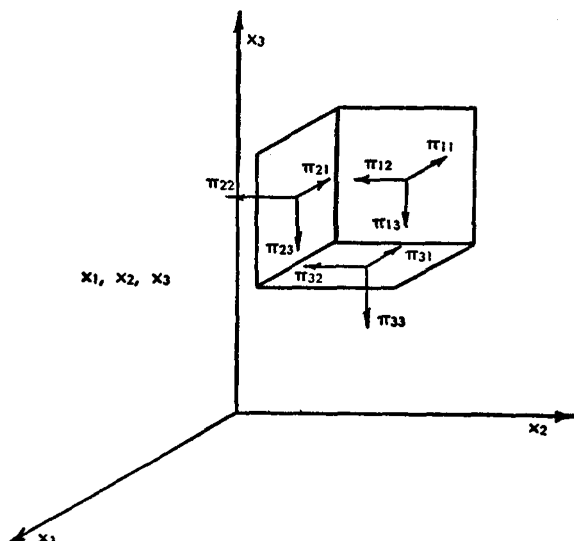
式中的 γ 是比热比. 在普通温度和压強之下，大多数气体是完全气体. 这时声速的计算十分简单，即

$$a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}. \tag{1.5}$$

A.2. 基 本 方 程

令一点的笛卡尔坐标系坐标为 x_i，此处 $i = 1, 2, 3$. 在时刻 t，坐标 x_i 点的流体速度分量记为 u_i，$i = 1, 2, 3$. 其密度和温度分别记为 ρ 与 T. 流体的温度是指，用一种滞后时间可以忽略的并和流体一起运动的温度计所测得的温度. 令 $q_i (i = 1, 2, 3)$ 为热通量矢，即单位时间流经单位面积的热流量.

流体中的应力可以表示为一微元流体各个表面各方向受力的強度. 图 A.2 a 示边长为 dx_1, dx_2, dx_3 的立方微元体上所具有的



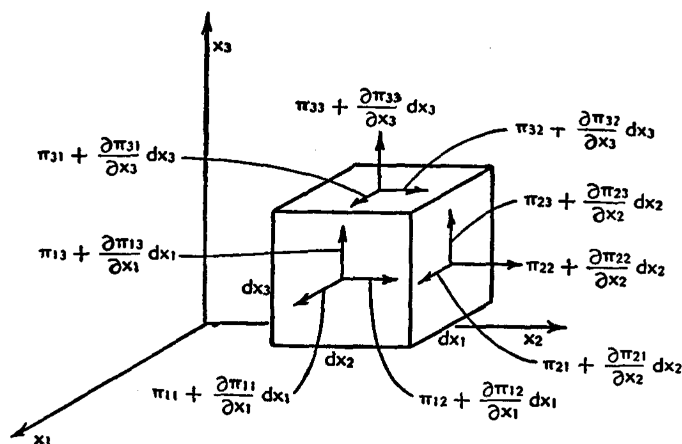


图 A.2 a

这些应力. 具体说来，π_{11} 指作用在与 x_1 轴垂直的面上而指向为 x_1 轴的单位面积上的拉力,或说拉应力. π_{12} 是作用在与 x_1 轴相垂直的面上而指向为 x_2 轴的单位面积上的剪切力，或说剪应力. 所以，π_{ij} 代表作用在与 x_i 轴垂直的面上而指向为 x_j 轴的应力,这九

个应力的组合简称为**应力张量**(见第IV卷*，B编). 当然微元立方体有两面垂直于同一坐标轴. 例如与 x_1 轴垂直的在 x_1 处有一个面，在 x_1+dx_1 处还另有一面. 如果应力是坐标的函数，并且在左边的面上各是 π_{11}，π_{12}，π_{13} 的话，那末在右边的面上应为 $\pi_{11}+(\partial\pi_{11}/\partial x_1)\,dx_1$，$\pi_{12}+(\partial\pi_{12}/\partial x_1)\,dx_1$，$\pi_{13}+(\partial\pi_{13}/\partial x_1)\,dx_1$. 微元立方体的其他几对面应是同样情况.

现在来计算诸应力的合力分量. 在 x_1 方向的分力是

$$
\begin{aligned}
&\left[-\pi_{11}+\left(\pi_{11}+\frac{\partial\pi_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)\right]dx_2\,dx_3\\
&\qquad+\left[-\pi_{21}+\left(\pi_{21}+\frac{\partial\pi_{21}}{\partial x_2}dx_2\right)\right]dx_3\,dx_1\\
&\qquad+\left[-\pi_{31}+\left(\pi_{31}+\frac{\partial\pi_{31}}{\partial x_3}dx_3\right)\right]dx_1\,dx_3\\
&=\left(\frac{\partial\pi_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\pi_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\pi_{31}}{\partial x_3}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3\\
&=\left(\sum_{j=1,2,3}\frac{\partial\pi_{j1}}{\partial x_j}\right)dx_1\,dx_2\,dx_3=\frac{\partial\pi_{j1}}{\partial x_j}dx_1\,dx_2\,dx_3.
\end{aligned}
$$

最末一式采用“取和约定”(Summation convention)，也就是说凡在一项里下标重覆，那末该项就对该下标求和**. 所以各应力的合力在 i 向的分力是

$$\frac{\partial\pi_{ji}}{\partial x_j}dx_1\,dx_2\,dx_3.$$

合力的诸分力必须与流体的彻体力和惯性力平衡. 显然一立方微元流体的彻体力和惯性力必须正比于其体积 $dx_1\,dx_2\,dx_3$；否则将无法和应力的合力保持平衡. 当然，事实上这个条件是得到满足的，因为彻体力和惯性力与微元立方体的质量成正比，而其质量正好是 $\rho\,dx_1\,dx_2\,dx_3$. 在建立此平衡方程之前，先考虑力矩的平衡关

---

* 指“高速空气动力学及喷气推进”(High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion) 丛书的第IV卷；余类同——编者注.

** 在工程或物理文章中常常要用到 $\sum a_ib_i$ 之类的表达式，为了方便，现在一般都采用这样一个约定，即将求和号省去，而凡是一项里同一下标出现两次时，就要理解为它是有求和号的. 如 $a_ib_i=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；$a_jb_kc_k=a_j(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)$——译者注.

系．仍取微元立方体，计算各力对一条平行于 x_3 轴的轴线的力矩． 彻体力和惯性力的力距是与微元体积和 dx_1 或 dx_2 的乘积成正比，是一个四阶微量． 图 A.2 a 表明对经过 (x_1, x_2, x_3) 点而平行于 x_3 轴的一根轴线的力矩平衡关系式如下：

$0 = (\pi_{12}\, dx_2\, dx_3)\, dx_1 - (\pi_{21}\, dx_3\, dx_1)\, dx_2 +$ 四阶微量项． 故得

$$\pi_{12} = \pi_{21}$$

或一般地表示为

$$\pi_{ij} = \pi_{ji}. \tag{2.1}$$

从力矩平衡得出来的这个结论总是成立的，并表明应力张量只有六个独立的分量． 这样的张量称为对称张量．

通常热力学压強 p 是由 p, ρ 和 T 满足流体的状态方程来定义的：

$$p = p(T, \rho), \tag{2.2}$$

这个状态方程是在静止条件下定出来的． 所以"粘性应力张量" τ_{ij} 应定义为

$$\tau_{ij} = \pi_{ij} + \delta_{ij} p, \tag{2.3}$$

式中的 δ_{ij} 是克罗内克尔 δ，定义为

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= 1, \qquad i = j; \\ &= 0, \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{2.4}$$

因当 $i \neq j$ 时，$\tau_{ij} = \pi_{ij}$，而方程(2.1)又说明 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$，所以 τ_{ij} 也是对称张量． 无粘性流体是 τ_{ij} 恆等于零的流体． 关于区分流体静压強 p（hydrostatic pressure）和粘性张量 τ_{ij} 的基本物理意义将于下节讨论．

取一个边长为 dx_1, dx_2, dx_3 的立方体来看． 单位时间流出立方体的淨质量流量是

$$\left(\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

根据质量守恆律，立方体内的流体密度就必须随时间变化，即

$$\left(\frac{\partial \rho u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho u_3}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 = -\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

所以质量守恆方程或**连续性方程**是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=0, \tag{2.5}$$

这里又用了取和约定．也就是说

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}=\sum_{i=1,2,3}\frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i}.$$

根据类似计算办法，得单位时间单位体积在 i 方向的动量增量是

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j}.$$

动量之所以增加乃由于微元立方体內的物质受有淨作用力的缘故．作用力有两个来源．设 X_i 代表单位质量所受的来自外源的力的分量，那末加速力的一部分就是 X_i．另一部分则来自应力张量 π_{ij}．如前面计算所示，作用在单位体积上的 i 向淨分力为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ji}) \text{ 或 } \frac{\partial}{\partial x_j}(\pi_{ij}),$$

根据张量 π_{ij} 的对称性此两项可以互换．单位时间单位体积的 i 向动量淨增量必等于作用于单位体积的 i 向力，表明这个关系的动力学方程便是

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=\rho X_i+\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.6}$$

把左侧各项展开，并用上连续性方程(2.5)，方程(2.6)又可写为

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=X_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}. \tag{2.7}$$

如引入粘性应力张量 τ_{ij}，则方程(2.6)和(2.7)变成

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho X_i+\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.8}$$

及

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+X_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.9}$$

方程(2.6)至(2.9)是**动力学方程**的四种形式．

在方程(2.7)及(2.9)中，左侧是随流体运动计算出来的流体微

团的加速度，也就是流体的实际加速度. 为了证明这一点是正确的，可以拿任何一个量 $f(t, x_i)$ 来看，这是时刻 t 及空间点 x_i 的函数. 假设观察者和流体微团一起运动，到了 $t+\delta t$ 时刻，这个空间点的坐标为 $x_i + u_i\delta t$. 所以对于这个观察者说来，物理量 f 随时间的变化率是

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{[f(t+\delta t, x_i+u_i\delta t)-f(t, x_i)]}{\delta t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f.$$

如记随流体微团的时间导数为 D/Dt，则

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_i\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{2.10}$$

如 e 代表单位质量流体的内能，则单位时间内单位体积此内能的增量为

$$\rho\frac{De}{Dt}.$$

此能量增量来自三方面：第一，来自象吸收辐射热、化学反应及燃烧的外加热. 记单位时间内加给单位质量的热能为 Q. 第二，来自热传导，其热通量矢 q_i 实际是减少微元立方体中的能量. 故单位时间单位体积的热能增量是

$$-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}.$$

第三，来自应力张量 π_{ij} 对流体所做的功. 兹对此作仔细分析：

先考虑 x_i 轴方向的一维流动的简单情况. 取一根单位截面的流管(见图 A.2b). 在 t 时刻一微段流体处于从 x_1 到 x_1+dx_1 的位置. 在稍后的时刻 $t+dt$，原在 x_1 点的流体移至 $x_1+u_1\,dt$ 点，而原在 x_1+dx_1 点的流体则移至 $x_1+dx_1+[u_1+(\partial u_1/\partial x_1)dx_1]dt$ 点. 原来这段流体的体积是 $dx_1\cdot 1$，现在变成了 $[1+(\partial u_1/\partial x_1)\,dt]\,dx_1\cdot 1$. 所以体积的变化是 $(\partial u_1/\partial x_1)\,dx_1\,dt$. 所做的功等于拉应力 π_{11} 乘以体积变化，即

$$\pi_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}dx_1\,dt.$$

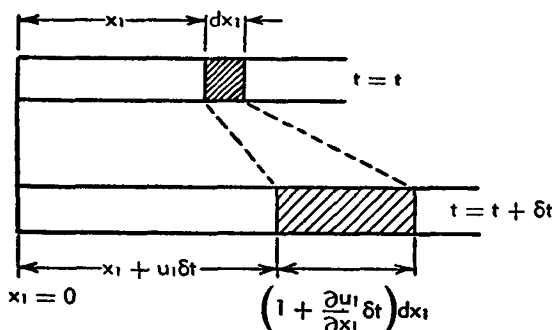


图 A.2b

单位体积的流体在单位时间内做的功就是

$$\pi_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}.$$

在三维流的一般情况下,还有类似的二附加项: $\pi_{22}(\partial u_2/\partial x_2)$, $\pi_{33}(\partial u_3/\partial x_3)$. 事实上 $\partial u_1/\partial x_1$ 就是流体微团在 x_1 方向的拉应变对时间的变化率, $\partial u_2/\partial x_2$ 是 x_2 向拉应变的变化率, $\partial u_3/\partial x_3$ 是 x_3 向拉应变的变化率. 所以单位时间单位体积所做的功应等于各应力和对应的**应变变化率**的乘积之和, 这里面包括切应力及切应变变化率. 问题是切应变率是什么? 为回答这个问题, 先观察表达流体微团在运动中的变形率张量 $\partial u_i/\partial x_j$. 这个张量可以分成对称部分和反对称部分:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)\\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

$$
-\begin{bmatrix}
0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \\
-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) & 0
\end{bmatrix}. \tag{2.11}
$$

如此分解的变形张量的物理意义可作如下的理解：反对称部分本来具有三个分量

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right).
$$

很容易证明这三个分量就是流体微团绕通过其中心而平行于三坐标轴的三轴线的角转动率分量。显然角转动不会使流体微团发生应变。所以所有的应变必由对称部分而生。已经证明

$$
\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2},\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3}
$$

是拉应变，因而其余的

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)
$$

必是切应变的变化率。这一点也可以象证明拉应变率 $\partial u_1/\partial x_1$ 那样作一详细计算。每一切应变具有两个对应的切应力。例如

$$
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)
$$

有 π_{12} 和 π_{21}。所以单位时间单位体积的总功是

$$
\pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}.
$$

于是，最后得**能量守恒**方程

$$
\frac{De}{Dt}=Q-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\pi_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{2.12}
$$

这个方程可以用动力学方程(2.7)改写一下。把每个动力学方程分别乘以相应的分速；然后加起来，得

$$
\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}u_iu_i\right)=u_iX_i+\frac{1}{\rho}u_i\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j},
$$

式中 $\frac{1}{2}u_iu_i$ 当然是单位质量流体的动能. 把上面这个方程和方程(2.12)相加，得

$$\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{1}{2}u_iu_i\right)=Q+u_iX_i-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ij}u_j), \tag{2.13}$$

这个方程给出流体内能与动能两者之和的变化率.

方程 (2.13) 的最后一项可以用方程 (2.3)和(2.4)所定义的粘性应力张量 π_{ij} 改写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ij}u_j)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(pu_i),$$

右侧第二项还可以用连续方程进一步演化为

$$-\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

所以能量方程的又一形式是

$$\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i\right)=Q+u_iX_i+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j), \tag{2.14}$$

此处 $h=e+(p/\rho)$ 是单位质量的焓. 方程(2.14)表示焓与动能之和的变化率. 如果外力 X 有势 $\mathscr{V}$，即

$$X_i=-\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial x_i}, \tag{2.15}$$

那末能量方程还可以变一个形式. 这时方程(2.12)可以写成

$$\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{1}{2}u_iu_i+\mathscr{V}\right)=Q+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial\mathscr{V}}{\partial t}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j). \tag{2.16}$$

如此形式的能量方程[1]的左侧是焓、动能和势能之和的变化率.

A.3. 粘性应力和热通量

在气体动力学问题里，未知量计有热力学参数 p, ρ 和 T, 速

度矢 u_i，热通量矢 q_i 和粘性应力张量 τ_{ij}. 当热力学参数确定时，内能 e 和焓 h 也随之确定.到现在为止所有推导出来的基本方程，即连续性方程、动力学方程、能量方程和流体的状态方程还不足以求解问题，因为未知量的数目超过现有方程数目. 欲完全确定问题，还需增添方程.

由于从微观的观点看来，任何一种流体都是由极多的分子所组成，所以气体动力学问题的基本处理得通过统计力学的原理进行. 假定经典力学可用，并设质点的总数是 N，每一质点的自由度数目是 n. 这 N 个质点的特定瞬时状态是为 nN 个位置坐标和 nN 个动量坐标组成的吉勃斯（Gibbs）相空间（共是 $2nN$ 维）中的一点所标明的. 统计力学的基本问题是要决定 N 个质点的系统在相空间的任何一点每一时刻的几率，或者说要决定相空间的 $2nN$ 坐标及时间 t 的几率分布函数. 一旦解决这一点，那末流体的任何一种宏观性质，如热通量和应力，便都可以通过平均几率分布函数来计算. 最近欧文（Irving）与寇克伍德（Kirkwood）[2] 曾作过这个平均计算.

决定几率函数的一般问题自然是极其困难的. 好在处于常压及低压下的气体，其分子密度是如此之低，只考虑分子两两相遇就行了. 换句话说，当两个分子接近到相互有显著影响的近距离时，可以认为气体中的其他分子离这两个相互作用的分子十分遥远，因此影响不到它们. 气体的分子运动论就是建立在这两两"相撞"的概念基础上的. 这种理论的几率分布函数还可做相应的大简化，即只考虑一个分子的几率分布函数. 这个分布函数是由一个名叫玻耳兹曼方程的积分-微分方程所决定. 恰浦门（Chapman）和恩斯考格（Enskog）([3]，第三章）假定分布函数随空间和时间的变化都很小，算得热通量和粘性应力张量是

$$q_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i}, \tag{3.1}$$

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \tag{3.2}$$

式中的 k 是热传导系数，μ 是**普通粘性系数**，μ' 是膨胀粘性系数．所以 μ 和剪应力及拉应力都有关系；但往往只有剪应力是重要的，因为散度 $\partial u_k/\partial x_k$ 和剪应变相比往往很小．但 μ' 却只和拉应力有关，当散度为零时，μ' 的作用也是零．所以 μ' 是体积膨胀率或收缩率的粘性系数．μ 和 μ' 为分子与分子之间的相互作用规律及分子的性质所决定的．例如，当分子沒有內在自由度时，或当內在运动沒有激发起来时，μ' 是零．多原子的分子，其 μ' 不为零．值得注意的是，前面从宏观角度论证过的应力张量的对称性，在分子运动论里还是成立的．

这两个粘性系数 μ 和 μ' 主要是温度的函数，压強对它们只有很微弱的影响．气体的 μ 随温度增高而增大，这个性质和液体的完全不同．有关粘性系数和热传导系数的详细讨论可参看本丛书的第 I 卷，D 编．不过方程 (3.1) 和(3.2)只适用于常压下的气体．在低压下，热通量和粘性应力都出现新的项．这些项曾由伯尼特 (Burnett) ([3]，第 15 章) 算出来过，十分复杂．(关于这个问题的讨论，可参看第 III 卷，H 编．)

方程(3.1) 和 (3.2)说明当温度梯度和速度梯度为零时，不存在热通量和粘性应力．只有当空间变化率存在时，这使得流体从一点流到另一点就需要适应新的情况，热通量和粘性应力才会出现．显然这样的适应并不可能瞬时完成，而是经过分子的多次碰撞才能完成的．所以正是在流场中不同点企图适应不同的热力学平衡这样一个过程才产生热通量和粘性应力的．当流体状态只有很微小的空间变化时，那末流体就简直沒有调整其状态的必要，而且很接近于热力学平衡．所以在热通量和粘性应力小到几乎近于零时，流体的状态，特别是压強、密度和温度之间的关系，必是热力学平衡之下的关系．这就是为什么应力张量 π_{ij} 可以分解为压強 p 和粘性应力张量 τ_{ij} 的缘故，这个压強是按流体处于热力学平衡之下的状态方程计算的．

最近格拉德 (Grad)[4] 发现了一种全新的解玻耳兹曼方程的方法．他的结果适用于象激波內部那样的条件，几率分布函数随

空间和时间作迅速变化的情况. 在这种分析法中, 热通量矢 q_i 和应力张量 τ_{ij} 不能表为速度及温度的导数的显式. 另一方面他提出的附加方程又包含了所有的未知变量. 所以在这种理论里变数 q_i 和 τ_{ij} 和其他的未知量 p, ρ, T 和 u_i 都处于同等地位. 格拉德的理论在稀薄气体动力学中的应用是特别重要的 (第 III 卷, H 编).

当然分子运动论不仅仅给出方程(3.1) 和 (3.2). 它还决定热传导系数和粘性系数与分子属性的关系(第I卷,D编). 如果只需要热通量和应力张量与其他指定的流场变数之间的关系式的话, 那末直接根据量纲分析及坐标变换的不变性, 一般已足以推导出来. 例如,如果规定应力张量为分速的空间导数的线性函数,那末就可以唯一的得出具有未知参数 μ 和 μ' 的方程(3.2) 来, μ 和 μ' 数值待定. 特鲁斯待尔 (Truesdell)[5] 曾作此冗长计算, 其结果表达式极为复杂.其初始几项自然就是方程(3.1)和(3.2)所给出的.

分子能量的三种主要形式是平移能、转动能和振动能. 三者中以振动能最不易激发 (第 I 卷. H 编). 所以如果气体状态发生急骤变化,则振动能一般落后于其平衡值. 高温气体,具有可观的分子振动能. 这时振动能的滞后是第二粘性系数 μ' 的主要来源.

不过这个问题还有另一种看法, 这是堪特劳维兹 (Kantrowitz)[6]首先提出的. 当激发分子振动所需的时间远较激发分子其他形式的运动所需时间为长时,这种方法特别适用. 其所以如此, 是因为粘性作用在运动方程中是以速度导数出现的, 所以是局部作用,不可能表现任何长时间的积分影响. 令 $e(T)$代表单位质量在热力学温度 T 时的平衡内能, $e_{\text{vib}}(T)$ 代表单位质量在 T 时振动能的平衡态值, e'_{vib} 代表实际的振动能. 假定其他形式的内能实际处于平衡状态,那末实际的内能便是

$$e = e(T) - e_{\text{vib}}(T) + e'_{\text{vib}} = e(T) + [e'_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}(T)], \quad (3.3)$$

$e'_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}(T)$ 是滞后量. 现在对小滞后量来说, 振动能向平衡态的趋近率可以近似地表为滞后量的线性函数,即

$$\frac{De'_{\text{vib}}}{Dt} = -\beta[e'_{\text{vib}} - e_{\text{vib}}(T)], \quad (3.4)$$

式中 β 是常数，具有时间的倒数量纲． 把方程(3.3)代入能量方程(2.12)和(2.13)，从而就引进一新的因变量 e'_{vib}. 不过这时方程(3.4)就是为这个未知量而增添的一个方程． 不用说，这样做之后，方程系中的 μ 值和 μ' 值应该不包括振动的滞后效应在内了．否则同一效应就算了两遍． 所以 μ' 的适当值根据堪特劳维兹理论则为零，而 μ 的适当值则由通常的分子运动理论计算(第I卷，D编)．振动滞后的净效果相当于粘性，当然也是消耗能量的．例如堪特劳维兹估计过，一个在纯二氧化碳里的薄物体的阻力可能达到普通粘性单独作用时的两倍．

在普通条件下的气体，用方程(3.1)和(3.2)两式可以给出足够准确的热通量和应力张量．将这两式代入动力学方程和能量方程，未知量的数目恰好等于方程的数目，因此基本方程组齐全．这组方程称为纳维埃-斯道克斯方程，当然这种称法是并不严谨的．本节以下讨论都以纳维埃-斯道克斯方程为基础．具体地说，这时能量方程(2.12)变成了

$$\frac{De}{Dt}=Q+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-\frac{p}{\rho}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\frac{\Phi}{\rho} \qquad (3.5)$$

式中的 Φ 称为**耗散函数**，其表达式为

$$\begin{aligned}\Phi&=\tau_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=\frac{1}{2}\tau_{ij}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\\&=\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2,\end{aligned} \qquad (3.6)$$

所以 Φ 是粘性耗散所产生的热量．方程(3.5)的另一种形式是

$$\frac{Dh}{Dt}=Q+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt}+\frac{\Phi}{\rho}, \qquad (3.7)$$

式中 h 当然就是单位质量的焓．

建立了微分方程组之后，气体动力学问题的完全确立就只缺**边界条件**了．边界条件包括在固体物面上对速度分量 u_i、温度 T、或热通量矢 q_i 所作的规定．在历史上，流体与固体物接触表面上的条件曾是个颇有争论的主题([7]，第676页)．所幸的是，在气

体动力学里,流体可以用分子运动论作微观处理.其结论是:在通常密度下,物体表面上的流体速度必须与物面的速度相等.换言之,流体与物面之间的相对运动必为零,此乃所谓无滑动条件.同理,流体的温度 T 必须等于物面的温度.这就是物面上无"温度突跃"条件.自然,当密度很低时,物面条件应作修改(第 III 卷,H 编),但对普通密度来说,无滑动和无温度突跃是决定问题的正确而又充分的条件.

在上面的讨论里,曾默认流体可作单纯一种气体来看.如果流体是由几种气体非均匀地混合而成,或者组成气体之间有化学变化,那情况就大为复杂了(第 II 卷,F 编).此外,即使流体起始是均匀混合气,在有巨大的温度梯度的地区,热扩散之类的特殊效应也会破坏混合气的均匀性的.好在飞行器和流体机械所遇到的主要气体动力学问题并没有如此复杂的情况,较简单的纳维埃-斯道克斯方程组已足够用.

A.4. 基本方程的积分形式

某些特殊问题用基本方程的积分形式比用前一节的微分形式往往来得方便.这积分区域是一**固定**的空间域.设其体积为 V,这个域可以是单连通的,也可以不是单连通的,可以为一个曲面所包围,也可以为多个曲面所包围.令这个域的微元体积为 dV,包围 V 的界面的微元记为 dA.令 n_i 为表面微元 dA 的单位法向矢(图 A.4 a).将微分形式转换为积分形式的基本运算是引用如下所示的斯道克斯定理:设 f_i 是任一向量,则

$$\int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dV = \int_A (f_i n_i) dA. \tag{4.1}$$

把方程(4.1)应用于连续性方程(2.5),得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \int_A \rho(u_i n_i)\, dA = 0. \tag{4.2}$$

这个方程的物理意义是很明白的:$\rho(u_i n_i)dA$ 是通过曲面微元 dA 流出这个域的质量流量.所以对 A 的积分就是净流出质量.因假

设此域中沒有加添或抽出流体，所以淨流出量必为域內质量变化率所平衡．方程（4.2）就是表达这一关系的．在一般有流体加入或抽出的情況，方程(4.2)的右侧应等于此域中的源和汇的強度的代数和．

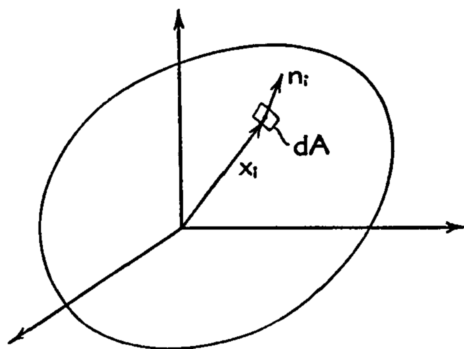


图 A.4 a

同理，动力学方程(2.6)转換成为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho u_i\, dV + \int_A \rho u_i(u_j n_j)\, dA$$
$$= \int_V \rho X_i\, dV + \int_A (\pi_{ji} n_j)\, dA, \qquad (4.3)$$

这个方程的物理意义也是很简单的．方程的左侧是此域內的流体在 x_i 方向的动量增量，而右侧则是产生这个增量的原因，即彻体力的合力和表面应力之合力．方程（4.3）当然是基于 V 域內沒有加入流体，也沒有抽出流体的这个假设的．当此假设不成立时，方程（4.3）的右侧还得加上由于引进或抽出流体所引起的动量变化率．

除了线动量之外，还可以计算对三条轴线的角动量．为此，最好引用一个符号 δ_{ijk}．这个符号的意义是：

$\delta_{ijk}=1$，如果 $i\neq j\neq k$，而 i, j, k 依 1，2，3 的顺序轮转；

$\delta_{ijk}=-1$，如果 $i\neq j\neq k$，而 i, j, k 不依 1，2，3 的顺序轮转；

$\delta_{ijk}=0$，其余情况.

例如 $\delta_{123}=1$，而 $\delta_{132}=-1$. 方程(2.6)可以写成

$$\frac{\partial \rho u_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_k u_i)=\rho X_k+\frac{\partial \pi_{ki}}{\partial x_i}.$$

以 $\delta_{ijk}x_j$ 乘此方程，然后沿体积 V 积分，

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\delta_{ijk}x_j u_k\,dV+\int_A \rho\delta_{ijk}x_j u_k(u_l n_l)\,dA$$
$$=\int_V \rho\delta_{ijk}x_j X_k\,dV+\int_A \delta_{ijk}x_j(\pi_{kl}n_l)\,dA. \qquad (4.4)$$

这是绕 x_i 轴的角动量方程，式中各项依取和约定对 j 和 k 取和. 不必多说，当有流体加入 V 或从 V 中抽出时，方程(4.4)还必须适当地包括这些源和汇的影响.

为了把能量方程(2.13)变换成积分形式，可以看到利用连续方程(2.5)可将方程(2.13)写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(e+\frac{1}{2}u_i u_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\rho u_i\left(e+\frac{1}{2}u_j u_j\right)$$
$$=\rho Q+\rho u_i X_i-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\pi_{ij}u_j),$$

从而沿 V 积分这个方程，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(e+\frac{1}{2}u_i u_i\right)dV+\int_A \rho\left(e+\frac{1}{2}u_j u_j\right)u_i n_i\,dA=\int_V \rho Q\,dV$$
$$+\int_V \rho u_i X_i\,dV-\int_A (q_i n_i)\,dA+\int_A (\pi_{ij}u_j n_i)\,dA. \qquad (4.5)$$

左侧表示流体的内能和动能之和的净增加率. 右侧表示这一增量的来由. 第一项是加入的热量，如通过化学反应，第二项是彻体力所做的功，第三项是通过传导所失去的热量，第四项是表面 A 上的应力所做的功. 能量方程另一种积分形式可以得自方程(2.16)，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\left(h+\frac{1}{2}u_i u_i+\mathscr{V}\right)dV$$
$$+\int_A \rho\left(h+\frac{1}{2}u_i u_i+\mathscr{V}\right)u_i n_i\,dA=\int_V \rho Q\,dV$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_V p\,dV+\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\mathscr{V}\,dV-\int_A (q_i n_i)\,dA$$

$$+\int_A (\tau_{ij}u_j n_i)\,dA, \tag{4.6}$$

方程左侧表示焓、动能与势能的和之净增加率. 右侧表示这个增量的来由. 第一项仍是加入的热量 Q,第二项是压力能的变化率,第三项是势能的变化率,第四项是通过传导所损失的热量损失率,最后,第五项是表面 A 上粘性应力所做的功率.

对积分形式的基本方程可以作如上的简单理解. 事实上, 如果愿意的话,可利用积分形式的方程作为讨论的起点,再从该方程导出微分方程.

绕物体的流动. 以流体绕一物体的**定常**流动(图 A.4 b)为例来说明积分方程的应用. 选取闭曲面 A_1 与物体间的空间为流体域, 曲面 A_1 包围物体在内. 这样, 流体域的表面 A 便有两部分:

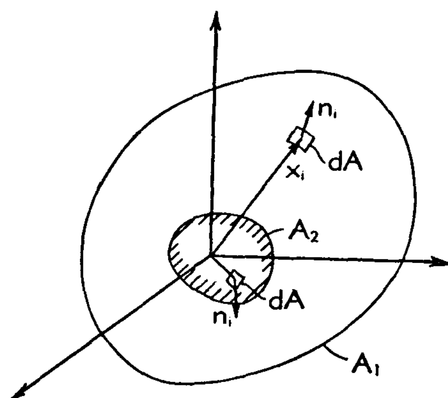


图 A.4 b

即 A_1 和物体表面 A_2. 进一步假定没有彻体力, 且 $Q=0$; 这时动量方程 (4.3) 的左右侧第一项均为零. 由于物体表面上流体速度为零, 所以方程 (4.3) 的左侧第二个积分中沿 A_2 的动量的通量积分为零. 此外, 根据作用力与反作用力相等的原理, 知方程 (4.3) 的右侧第二个沿 A_2 的积分应等于作用在物体上的合力 F_i, 但与

飞方向相反. 所以

$$\int_{A_1} \rho u_i(u_j n_j)\, dA = \int_{A_1} (\pi_{ij} n_j)\, dA - F_i. \qquad (4.7)$$

此式表明,可以从沿包围该物体的曲面 A_1 的积分求得物体所受的作用力 F_i. 一个好用的办法是取曲面 A_1 远离该物体, 以使上列积分计算大大简化.

用同样的办法于角动量各方程(方程 4.4),可得作用于固体物的绕坐标轴的力矩 M_i 的方程为

$$\int_{A_1} \rho\delta_{ijk} x_j u_k(u_i n_i)\, dA = \int_{A_1} \delta_{ijk} x_j (\pi_{ki} n_i)\, dA - M_i. \qquad (4.8)$$

记固体物所吸收的热量为 H, 利用方程(4.6)则得能量方程如下:

$$\int_{A_1} \rho\left(h + \frac{1}{2} u_j u_j\right) u_i n_i\, dA$$

$$= -H + \int_{A_1} (\tau_{ij} u_j n_i)\, dA - \int_{A_1} (q_i n_i)\, dA. \qquad (4.9)$$

如用粘性应力 τ_{ij}, 则方程(4.7),(4.8)和(4.9)可以写成

$$F_i = \int_{A_1} [\tau_{ji} n_j - p n_i - \rho u_i(u_j n_j)]\, dA, \qquad (4.10)$$

$$M_i = \int_{A_1} \delta_{ijk} x_j\, [\tau_{lk} n_l - p n_k - \rho u_k(u_l n_l)]\, dA, \qquad (4.11)$$

$$H = \int_{A_1} \left[\tau_{ij} u_j n_i - q_i n_i - \rho\left(h + \frac{1}{2} u_j u_j\right) u_i n_i\right] dA. \qquad (4.12)$$

这三个方程表明: 作用在物体上的力就是沿 A_1 的应力积分和沿 A_1 的动量积分之差; 同样的,作用在物体上的力矩等于沿 A_1 应力的力矩积分和动量矩积分之差; 最后, 物体所吸收的热量等于 A_1 面上的粘性应力所做的功与热量、焓及动能三者流出界面 A_1 的总外流量之差.

A.5. 相似性和流动参数[1)]

为清晰起见, 兹考虑一具体问题. 设在未扰速度为 U 并具有

1) 另一种讨论相似性的方法见 第 VIII 卷, D 编.

重力作用的无限流场里，存在一典型的线性尺寸为 L 的物体，L 可以是物体的长度．物体正在作频率为 f 的振动．自由流中的各物理量注以下标 ∞，无量纲的量注以星号．于是

$$
\begin{aligned}
&t = \frac{1}{f} t^*, \quad T = T_\infty T^*, \quad X_i = g X_i^*, \\
&x_i = L x_i^*, \quad u_i = U u_i^*, \quad \tau_{ij} = \frac{\mu_\infty U}{L} \tau_{ij}^*, \\
&\rho = \rho_\infty \rho^*, \quad e = e_\infty e^*, \quad q_i = \frac{k_\infty T_\infty}{L} q_i^*, \\
&p = p_\infty p^*, \quad Q = \frac{U e_\infty}{L} Q^*,
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

此处

$$
q_i^* = -\frac{k}{k_\infty} \frac{\partial T^*}{\partial x_i^*}, \tag{5.2}
$$

$$
\tau_{ij}^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}\right) + \left(\frac{\mu'}{\mu_\infty} - \frac{2}{3}\frac{\mu}{\mu_\infty}\right)\delta_{ij}\frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}, \tag{5.3}
$$

g 是重力常数．利用这些无量纲变数，则连续方程(2.5)可以写为

$$
\left(\frac{Lf}{U}\right)\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0, \tag{5.4}
$$

动力学方程(2.9)变成

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{Lf}{U}\right)\frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = &-\left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty U^2}\right)\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} \\
&+ \left(\frac{gL}{U^2}\right) X_i^* + \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U L}\right)\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*}.
\end{aligned} \tag{5.5}
$$

记定压比热为 c_p，其在自由流中的值为$(c_p)_\infty$。则能量方程(2.12)成为

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{Lf}{U}\right)\frac{\partial e^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial e^*}{\partial x_i^*} \\
&\quad = Q^* - \left(\frac{k_\infty}{c_{p\infty}\mu_\infty}\right)\left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U L}\right)\left(\frac{c_{p\infty} T_\infty}{e_\infty}\right)\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial q_i^*}{\partial x_i^*} \\
&\qquad - \left(\frac{p_\infty}{\rho_\infty U^2}\right)\left(\frac{U^2}{e_\infty}\right)\frac{p^*}{\rho^*}\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} + \left(\frac{\mu_\infty}{\rho_\infty U L}\right)\left(\frac{U^2}{e_\infty}\right)\frac{\tau_{ij}^*}{\rho^*}\frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}.
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

上列各方程中括号內的因子都是无量纲的．这些数便于取作问题的参数．其中 Lf/U 通常称为“减缩频率”，U^2/gL 为傅劳德数，而 $\rho_\infty UL/\mu_\infty$ 为雷诺数．比值 p_∞/ρ_∞ 具有速度平方的量纲．事实上 $\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}$ 是和分子无规则运动的平均速度同一数量级，也和自由流中扰动传播速度同一量级．所以 $U/\sqrt{p_\infty/\rho_\infty}$ 是和自由流速与扰动传播速度（卽声速）之比同一量级．当然流速对声速之比，就是马赫数．所以 $p_\infty/\rho_\infty U^2$ 就是马赫数平方的倒数．e_∞ 和分子骚动的动能同量级．因而 e_∞ 又和分子的平均速度之平方或声速的平方同量级．于是 U^2/e_∞ 又是马赫数的平方．因子 $\mu_\infty c_{p\infty}/k_\infty$ 是传热效应和粘性效应的相对重要性之度量．这个数称为普朗佗数．因数 $c_{p\infty}T_\infty/e_\infty$ 约等于焓与內能之比，是量级为 1 的一个数值．

然而流体力学的一个非常重要的问题就是相似问题．具体的说，我们所关心的是一些几何相似的物体，相似物体可以用平移，或按比例放大或缩小的办法使之彼此重合．再考虑前面所述在无限流场中的物体振动问题．问题是：对于两个几何相似的物体应该如何规定其自由流参数 U，p_∞，ρ_∞，T_∞，μ_∞，k_∞，e_∞ 和 L 与 f，才能使两组参数都导出同样的无量纲微分方程（卽方程 5.4，5.5 和 5.6）来？如果能解决这个问题的话，那末对应于这两组参数的两个流场就是“相似”的．也就是说，对于两流场说来，如把一切变数都改成无量纲的话，变数之间的函数关系两者都是一样的．这样就使气体动力学问题得到大大的简化，可以节省许多时间和精力．这样的收获自然不可能不付出一点代价，那就是得牺牲一些普遍性．换句话说，不对流体的屬性加上某些限制的话，这样有力的相似律是得不出来的．好在在常温和常压下气体足可以近似地当作“完全气体”处理．完全气体是遵循下列状态方程的气体：

$$p = \mathscr{R}\rho T, \tag{5.7}$$

式中的 $\mathscr{R}$ 是特定气体的气体常数．等容比热 c_v 和等压比热 c_p 都可能是温度的函数，但二者之间存在下列的关系

$$c_p = c_v + \mathscr{R}. \tag{5.8}$$

如果 γ 是两种比热之比，

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}, \tag{5.9}$$

那末按方程(1.4)，声速就成为

$$a^2 = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma\mathscr{R}T. \tag{5.10}$$

于是内能 e 成为

$$e = \int_0^T c_v dT, \tag{5.11}$$

于是

$$\frac{e_\infty}{c_{p\infty}T_\infty} = \int_0^1 \frac{c_p}{c_{p\infty}} dT^* - \left(1 - \frac{1}{\gamma_\infty}\right) \tag{5.12}$$

及

$$e^* = \frac{\left[\int_0^{T^*}\frac{c_p}{c_{p\infty}} dT^* - \left(1 - \frac{1}{\gamma_\infty}\right)T^*\right]}{\left[\int_0^1 \frac{c_p}{c_{p\infty}} dT^* - \left(1 - \frac{1}{\gamma_\infty}\right)\right]}. \tag{5.13}$$

如果 M 代表马赫数，那末

$$\frac{\rho_\infty U^2}{p_\infty} = \gamma_\infty M_\infty^2$$

及

$$\frac{U^2}{e_\infty} = (\gamma_\infty - 1)M_\infty^2 \frac{c_{p\infty}T_\infty}{e_\infty}.$$

记雷诺数为 Re，普朗佗数为 Pr，傅劳德数为 Fr，减缩频率为 κ，即

$$\frac{\rho_\infty UL}{\mu_\infty} = Re_\infty, \tag{5.14}$$

$$\frac{\mu_\infty c_{p\infty}}{k_\infty} = Pr_\infty, \tag{5.15}$$

$$\frac{U^2}{gL} = Fr, \tag{5.16}$$

$$\frac{Lf}{U} = \kappa. \tag{5.17}$$

则连续方程，动力学方程和能量方程分别变成

$$\kappa \frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \rho^* u_i^*}{\partial x_i^*} = 0, \tag{5.18}$$

$$\kappa \frac{\partial u_i^*}{\partial t^*} + u_j^* \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} = -\frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{1}{Fr} X_i^* + \frac{1}{Re_\infty \rho^*} \frac{\partial \tau_{ij}^*}{\partial x_j^*}, \tag{5.19}$$

$$\kappa \frac{\partial e^*}{\partial t^*} + u_i^* \frac{\partial e^*}{\partial x_i^*} = Q^* - \frac{1}{Pr_\infty Re_\infty}\left(\frac{c_{p\infty} T_\infty}{e_\infty}\right) \frac{1}{\rho^*} \frac{\partial q_i^*}{\partial x_i^*} - \frac{\gamma_\infty - 1}{\gamma_\infty}\left(\frac{c_{p\infty} T_\infty}{e_\infty}\right) \frac{p^*}{\rho^*} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i^*} + \frac{(\gamma_\infty - 1) M_\infty^2}{Re_\infty}\left(\frac{c_{p\infty} T_\infty}{e_\infty}\right) \frac{\tau_{ij}^*}{\rho^*} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*}. \tag{5.20}$$

状态方程(5.7)可以写成如下的无量纲形式

$$p^* = \rho^* T^*. \tag{5.21}$$

研究一下(5.18)到(5.20)各方程以及(5.12)和(5.13)各方程，可以看出来，欲使两流动相似，其参数值必须满足下列要求，即减缩频率 κ、马赫数 M_∞、雷诺数 Re_∞ 和傅劳德数 Fr 相同. 此外，流体的属性还必须使两种流动的普朗佗数 Pr_∞ 和两种比热之比 γ 都相同. 还有，比热，热传导系数 k 和粘性系数 μ 和 μ' 随温度的变化规律都必须使 $c_p/c_{p\infty}$, k/k_∞, μ/μ_∞ 及 μ'/μ_∞ 各比值各成为温度 T^* 的唯一函数. 如果 c_p, k, μ, μ' 随温度 T 的幂变化的话，最后这个条件便能得到满足. 不用多说，方程(5.1)是包含了这样一条假设的，即加给单位质量的热能 Q 是和 Ue_∞/L 或 UT_∞/L 成正比的. 当上列的这些条件全部满足的时候，那末这两种流动就有相同的无量纲微分方程组. 只要二者的无量纲边界条件也相同，那末二者用无量纲变数表达的解应是一样的.

重要的边界条件是物体表面的条件. 这就是流体和固体物面之间相对速度必为零的条件，以及物面上的温度条件. 流速的条件是一种齐次的条件，它不会再引出新的相似参数来. 但物体表面的温度是规定物体与流体之间的热通量的，将引出一个新的相

似条件来．令 $(q_i)_W$ 代表物面上的热通量矢．则这个边界条件的无量纲形式应是

$$(q_i^*)_W = \frac{(q_i)_W L}{k_\infty T_\infty} = F((x_i^*)_W, t^*), \tag{5.22}$$

式中的 $(x_i^*)_W$ 是物面各点的无量纲坐标．要相似，函数 F 就得相同．根据这一个条件，壁面无量纲温度应确定为 $T_W^* = T_W/T_\infty$．于是条件(方程 5.22)就等于

$$Nu = \frac{(q_i^*)_W}{T_W^* - 1} = \frac{(q_i)_W L}{k_\infty(T_W - T_\infty)} = Nu((x_i^*)_W, t^*), \tag{5.23}$$

Nu 称为努赛尔传热数．

总括起来，对于一种非定常的、有热传导的和粘性的完全气体的运动来说，若单位时间加给单位质量的热量为 Q，且受重力影响，则相似条件就是要下列各参数相同：马赫数 M_∞，雷诺数 Re_∞，减缩频率 κ，傅劳德数 Fr，普朗佗数 Pr_∞，两种比热之比 γ_∞，作为 T^* 的函数的比值 $c_p/c_{p\infty}$, k/k_∞, μ/μ_∞, μ'/μ_∞，作为 x_i^* 和 t^* 的函数的 QL/UT_∞ 以及最后作为 $(x_i^*)_W$ 和 t^* 的函数的努赛尔数．不用说，当物体运动不是纯振动的时候，只要以 $1/\tau$ 代替频率 f，上面的分析仍可适用，τ 是问题里的特征时间．这时减缩频率变成了 $L/U\tau$．如果粘性和热传导的作用都可以略去不计的话，那末上述的相似条件中可以不要雷诺数、普朗佗数，k/k_∞, μ/μ_∞, μ'/μ_∞ 以及努赛尔数．如果沒有外在的力场作用，那末傅劳德数用不着考虑．如果运动是定常的，减缩频率恆等于零．如果沒有热量加入，Q 就恆等于零．如果比热是常数，那末比值 $c_p/c_{p\infty}$ 又可以不列入相似条件．所以如果要研究的只是有粘性导热的完全气体的定常运动，且气体的比热是常数，热传导系数和粘性系数都是常数，并沒有热量加入，也沒有外力场的作用，那末流动的相似性便为马赫数、雷诺数、普朗佗数、努赛尔数以及两种比热之比所规定．

A.6. 理 想 气 体

对于任何的实际气体或数种气体的混合物，k 和 μ 的相对值

总是使普朗佗数是 1 的量级. 事实上,按分子运动论,单原子气体的普朗佗数是恰等于 1 的. 所以粘性的影响和热传导的影响同等重要: 作分析时考虑了一种影响,同时也得考虑另一种影响,这样才是正确的. 粘性系数 μ 和 μ' 以及热传导系数 k 的数值都很小. 当物体的尺寸为呎的量级,速度 U 为每秒数十呎或数百呎的量级,压強 p_∞ 为 1 个大气压左右时,雷诺数是十分巨大的,约在一百万左右. 方程(5.19) 和 (5.20)说明一般情况可以忽略粘性和热传导作用. 只在温度梯度和速度梯度很大的地区,粘性和热传导才会起重要作用. 什么地方的温度梯度和速度梯度很大呢? 在亚声速流动里只有边界层里才有这样的大梯度;在超声速流动里,激波里面也有很大的温度梯度和速度梯度. 所以只有在边界层或激波里才需要考虑粘性和热传导的作用. 可以认为在这些区域之外的流体是无粘性的和不传热的. 这样的流体称为理想可压缩气体. 如果流体又是完全气体,那末就称为理想完全气体. 用于理想气体,运动方程由于沒有粘性应力和热通量项,而得以大为简化.

在边界层和激波里,粘性和热传导项都是很重要的,所以处理这类问题是相当复杂的(参看第 III 卷 D 编及第 IV 卷). 如果边界层和激波区中的粘性方程的解必得和这些地区以外的非粘性方程的解连在一起,才能使整个问题同时得到解决的话,那末即使雷诺数很大,气体动力学问题也不会得到很大程度的简化. 幸好大多数问题都不是这样的情况. 通常激波是如此之薄,可以认为它的厚度是无限小量,而在激波两侧的气体,由于在激波之外,所以都是理想气体. 这时激波不过是一个数学上的不连续面而已. 一旦给定激波前的条件和波的形状,突跃量是很容易计算的,无需用到粘性流微分方程. 这也就是说,可以容易地得到解的一个重要部分. 边界层的问题则困难得多,因为它的厚度虽很薄,却又不可忽略. 不过,正因为它的厚度很薄,边界层通常对于层外的所谓的势流的扰动是可忽略的. 所以处理气体动力学问题的一种合乎逻辑的方法是,先略去粘性和热传导,但如果需要的话必须包括激波的突跃,把流场计算出来. 然后用这样初次近似求得的物

体表面上的压強、速度和温度分布去解该物体的边界层问题．算出边界层之后，就可以算出物面上的切应力和热通量．这样的迭代程序使问题大大简化，这就是经典的普朗佗边界层理论的基础．

对亚声速流来说上面所述分析方法是很成功的．在超声速流中，越过激波的強大压強升高是可能大大影响边界层的发展的，而改变后的边界层又可能显著地影响激波的形状．这种相互影响称为边界层和激波的相互作用，这是近来大力研究的一个课题．在高超声速流，即马赫数十分大的流动中，头激波平坦而逼近物面，激波和边界层很靠近，即使边界层很薄也会影响到激波的形状．这种情况可以称为高超声速流的边界层-激波相互作用．有这类的相互作用出现时，经典的边界层理论就不再适用了．

另外一种简化通常总是可能的．傅劳德数 Fr 是 U^2/gL，此处 L 是物体的典型尺寸，U 是典型速度，如果外力场是重力的话，g 是重力常数．所以飞行器的气体动力学问题中，傅劳德数总是十分巨大的，大到使动力学方程(方程 5.19)的外力项小到可以略去．这时外力就可以略去不计．

从以上几节的讨论可以看清楚，在气体动力学中重要的问题就是沒有外力场作用的理想气体的流动问题．其动力学方程沒有粘性应力和外力，其能量方程沒有热通量项和粘性耗散项，因而问题就大大简化了．和微分方程的简化同时，固体物面上的边界条件也得到放松．现在只要求相对物体表面的流速和物面相切，而不需要为零了．物面上的温度条件也不要了．现在流体的温度为其他的变量所单一决定，它在物面上的值是不能任意规定的．

A.7. 理想气体的非绝热流动．环量与涡量

沒有外力作用的理想气体的方程组是

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=0, \tag{7.1}$$

$$\frac{Du_i}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \tag{7.2}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(h + \frac{1}{2} u_i u_i\right) = Q + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{7.3}$$

这个方程组曾是希克斯 (Hicks)[8]研究所谓非绝热流动的基础，非绝热流是和无热加入(即 $Q = 0$)的绝热流相反的一种流动. 希克斯要寻求的是燃烧所造成的加热效应，所以他用非绝热流作为燃烧场中进行反应中的气体流动的模型. 当运动是**定常**的时候，即当流场参数不是 t 函数的时候,则 $\partial p/\partial t = 0$，方程 (7.3) 表明对任何流体微团说来，焓和动能之和的变化率恰等于所加的热量 Q. 在这个意义上，焓和动能之和可以看作是流体的"总能量" h^0. 这是个十分有用的概念. 在特殊的绝热流动下，$Q = 0$，总能量沿任何一微团的迹线，或说沿任何一条流线，必是常数. 不过应该注意上述有关这条定理的限制条件：这结论只在无粘不传热的气体作定常运动时才成立.

另一个尚未讨论过的重要的流场变数是涡矢 $\mathbf{\Omega}$. 涡矢表示流体微团的内旋转的強度，定义是

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \tag{7.4}$$

这里采用习用向量符号，$\mathbf{u}$ 是速度矢，其值是 u，

$$\mathbf{u} = \mathbf{i}u_1 + \mathbf{j}u_2 + \mathbf{k}u_3, \tag{7.5}$$

$\nabla \times$ 是旋度算子，故

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{7.6}$$

这些方程里的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 分别是 x_1, x_2, x_3 三个方向的单位向量. 拿方程(7.6)中诸量和方程(2.11)中诸量对比，可以看到，涡矢的三个分量是等于变形张量的反对称部分的三个量的二倍的. 所以涡矢等于流体微团的角速度矢的二倍.

用向量符号，连续性方程成为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \tag{7.7}$$

算子 $\nabla \cdot$ 是散度算子，故

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}. \tag{7.8}$$

于是动力学方程变成

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \tag{7.9}$$

式中的 ∇p 是压强 p 的梯度矢. 能量方程可以写成

$$\frac{Dh^0}{Dt} = Q + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{7.10}$$

式中的 h^0 是总能量,或

$$h^0 = h + \frac{1}{2}u_i u_i. \tag{7.11}$$

现在根据向量分析可以把这些基本方程作一些变换:

$$\nabla\left(\frac{1}{2}u_i u_i\right) = \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}\right) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \tag{7.12}$$

所以方程(7.9)可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}u_i u_i\right) - \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla p. \tag{7.13}$$

如果 s 代表气体的熵,那末热力学第一定律要求

$$T\,ds = dh - \frac{1}{\rho}dp \tag{7.14}$$

及

$$T\frac{Ds}{Dt} = Q. \tag{7.15}$$

比热为常数的理想气体的状态方程可以用 s, p, ρ 表为

$$p = \text{const}\ \rho^\gamma e^{s/c_v}. \tag{7.16}$$

用方程(7.14)消去压强梯度项,动力学方程就还可以写为

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = T\nabla s - \nabla h \tag{7.17}$$

或

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \mathbf{\Omega} = T\nabla s - \nabla h^0. \tag{7.18}$$

此关系式通常称为克罗柯 (Crocco) 定理(参看 [9]). 用方程

(7.15) 代替 Q，能量方程成为

$$\frac{Dh^0}{Dt}=T\frac{Ds}{Dt}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{7.19}$$

利用这些变换方程，可以研究理想气体流动中涡量的产生了．就方程(7.13)两侧取旋度，并注意 $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{u}=0$，得

$$\frac{\partial\mathbf{\Omega}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{\Omega}-(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\mathbf{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{u})$$

$$=-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)$$

或

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt}=(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}-\mathbf{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{u})-\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right), \tag{7.20}$$

这个方程的又一种形式可用方程(7.14)推得

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt}=(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}-\mathbf{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{u})+\nabla T\times\nabla s. \tag{7.21}$$

如果 p 只是 ρ 的函数，那末方程 (7.20) 右侧最后一项可写成一个标量函数的梯度之旋度，因而该项为零．如果单位质量的熵值是常数，那末由于 $\nabla s=0$，而方程 (7.21) 的最后一项为零．只要气体是均熵的，即气体到处的熵都相同，这两个条件都被满足．因此在理想气体流中，流体微团的涡量的变化率是由方程 (7.20) 或 (7.21) 右侧的头两项组成的． 如果流场上每一点的 $\mathbf{\Omega}$ 在某一瞬间为零，那末 $D\mathbf{\Omega}/Dt=0$，所以流场上每一点的涡量保持为零．这种流动称为无旋流．另一方面如果流动不是均熵的，即流场上各点的熵值各不相同的话，那末即使在某一瞬间，流场上到处 $\mathbf{\Omega}$ 都是零，方程 (7.21) 右侧最后一项也会使下一瞬间涡量 $\mathbf{\Omega}$ 不为零的．所以非均熵流不可能是无旋流． 因此，无旋意味着均熵，然而，均熵当然并不意味着无旋．

现在来考虑绝热的连续流动，设该流动是由均匀静止状况(在 $t=0$ 时，$\mathbf{u}=0$) 开始流动起来的．按方程(7.15)看，只要流动是绝热和连续的，任何一个流体微团的熵值都是常数． 但在 $t=0$ 时，到处熵值都是相同的，也即初始状况是均一的．因此运动将永

远是均熵的. 此外, 在 $t=0$ 时, 因各处的流速是零, 故 $\mathbf{\Omega}=0$. 所以在理想气体作绝热连续流动的假设下, 从静止状况起始的任何一种运动都是无旋的. 不是因为在超声速流中要出现激波的话,那这里面简直就包括了所有的势流问题. 在理想气体里,激波是突跃面, 它可以产生涡(参看第 III 卷, D 编和 E 编). 但即使有激波存在,它所产生的涡量通常是不大的;所以尽管无旋流是很特殊的流动,但却具有很大的实用重要性.

方程(7.20)或(7.21)右侧第一项 $(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 可以看作是沿涡矢 $\mathbf{\Omega}$ 方向的线或涡线的弯曲效应. 为说明这一点, 假定在 t 瞬间涡矢只在 x_1 轴的方向有一个分量 Ω_1, 而沒有 u_1. 那末 $(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ 有两个分量

$$\Omega_1\frac{\partial u_2}{\partial x_1} \text{ 和 } \Omega_1\frac{\partial u_3}{\partial x_1},$$

一个是 x_2 方向, 一个是 x_3 方向. 现在来看一微元线段(图 A.7), 这微元段在 t 时和 Ω_1 重合, 其长度为 dx_1. 经 dt 时间后, 线段的左端从 x_1, x_2, x_3 移到了 x_1, $x_2+u_2\,dt$, $x_3+u_3\,dt$. 右端从 x_1+dx_1, x_2, x_3 移到了

$$x_1+dx_1,\ x_2+\left(u_2+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}dx_1\right)dt,\ x_3+\left(u_3+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}dx_1\right)dt.$$

所以原来的线段现在变得和 x_1 轴相倾斜了,它现在和 x_2 轴的方向余弦等于 $(\partial u_2/\partial x_1)\,dt$, 和 x_3 轴的方向余弦等于 $(\partial u_3/\partial x_1)\,dt$. 现在假设涡量 Ω_1 原来和 x_1 轴重合, 并和流体一起运动,而且保持它的強度不变. 那末经 dt 时间后, 它就有了 x_2 轴方向的分量,其值等于 $\Omega_1(\partial u_2/\partial x_1)\,dt$, 还有 x_3 轴方向的分量 $\Omega_1(\partial u_3/\partial x_1)\,dt$. 所以沿 x_2 轴涡随时间的增加率是 $\Omega_1(\partial u_2/\partial x_1)$, 沿 x_3 轴涡随时间的增加率是 $\Omega_1(\partial u_3/\partial x_1)$. 这正是 $(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u}$. 所以这个量表示由于涡线弯曲而生的涡增加率. 同理,第二项,即和散度 $\nabla\cdot\mathbf{u}$ 或体积变化率有关的 $-\mathbf{\Omega}(\nabla\cdot\mathbf{u})$ 可以理解为包围涡线的流管的伸延效应. 所以如果压強只是密度的函数,或者如果熵是个常数,因而流体微团的 $\mathbf{\Omega}$ 的变化只有上述两项的话,那末上述的结果可以认为是涡

管的横截面积与涡強 Ω 二者的乘积保持不变，对空间和时间说来都不变. 用于不可压缩流体，这条定理原是海姆霍尔兹证明的. 这种不变性说明涡的概念是很有用的.

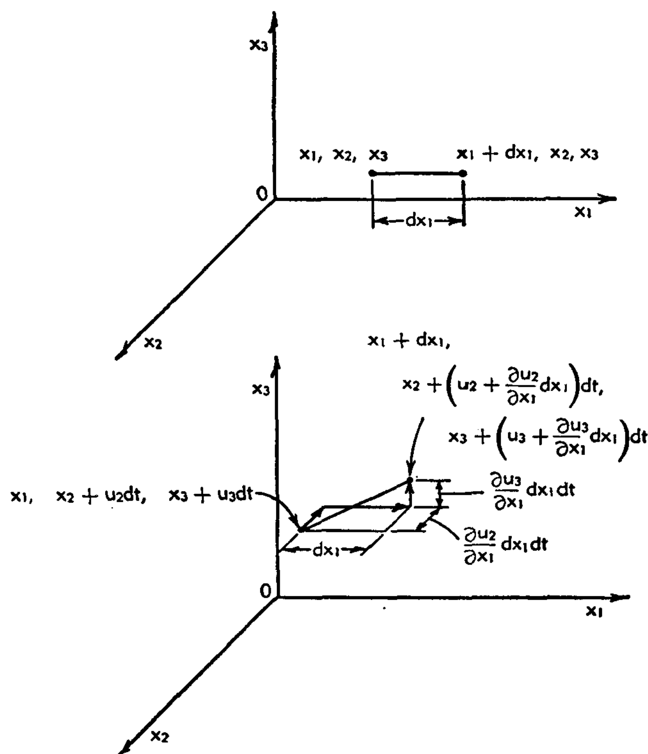


图 A.7

海姆霍尔兹定理的内容还可以用另一种办法证明，这种证法也许更直接些：令 Γ 为沿任何闭合路线 C 的环量，定义为

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}, \tag{7.22}$$

式中的 $d\mathbf{l}$ 是路线 C 上的微元线段. 引用围线积分的斯道克斯定理则

$$\Gamma = \int_A (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A} = \int_A \mathbf{\Omega} \cdot d\mathbf{A}, \tag{7.23}$$

式中的 A 是单连曲面，其边界是 C. 方程(7.23)表明涡管的截面积与涡強 $\mathbf{\Omega}$ 二者的乘积等于绕涡管截面的环量 Γ. 海姆霍尔兹定理说随着流体运动的环量是常数. 所以得计算 $D\Gamma/Dt$. 但

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\frac{D}{Dt}\oint_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{l}=\oint_C \frac{D\mathbf{u}}{Dt}\cdot d\mathbf{l}+\oint_C \mathbf{u}\cdot d\mathbf{u},$$

式中的 $d\mathbf{u}$ 是沿围线的速度矢的微分量. 不过 $\mathbf{u}\cdot d\mathbf{u}=d\left(\frac{1}{2}u_iu_i\right)$;所以如果速度场是连续的话，右侧第二个积分等于零. 用方程(7.9)或(7.16)，并引用斯道克斯定理

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=-\int_A\left[\nabla\times\left(\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\right]\cdot d\mathbf{A}=\int_A(\nabla T\times\nabla s)\cdot d\mathbf{A}\quad(7.24)$$

因此，只要压強仅仅是密度的函数或者熵是常数，沿随流体运动的任一闭路的环量必是常数. 这是开耳芬 (Kelvin) 定理.

不过在一般的场合，即使是理想气体，环量也不是常数. 这和密度不变的不可压流体的情况是大不相同的. 事实上，方程(7.24)可以写成

$$\frac{D\Gamma}{Dt}=\int_A\left[\nabla p\times\nabla\frac{1}{\rho}\right]\cdot d\mathbf{A}.\qquad(7.25)$$

方程(7.25)立刻证明，如果 ρ 是常数(譬如不可压流体)，那末 Γ 一般地总是常数; 对于可压缩流来说，方程(7.25)可以作如下的解释: 在流场里作等间距的 $p=\text{const}$ 曲面族和 $1/\rho=\text{const}$ 的曲面族，这些曲面围成一系列的管子. 沿着随流体运动的围线 C 的环量，在单位时间内的变化是正比于 C 所包的管子数目的. 这条定理是伯耶克纳斯 (Bjerknes)[10] 提出来的.

驻点量. 在本节讨论中引进 h^0 为单位质量的焓和动能之和，或总能量. 这个量通常称为流体单位质量的"驻点焓值"，其概念是这样的: 用某种办法从流场任何一点取出流体，它具有在这一点的当地压強、密度、温度和流速，然后以减低流速的办法把这团流体作**等熵**压缩，直到流速降到零为止，即达到滞止为止. 流体微团在滞止条件之下所达的最后状态，称为原取出点的流体的驻点状态. 所以可以有驻点焓、驻点温度、驻点压強和驻点密度等名

词. 当然沒有驻点速度，按定义它应等于零. 为了避免可能的混淆，压缩之前流体本来的状态即流场当地值，称为静状态. 所以当地的焓是静焓，压强是静压，等等. 应该特别注意，这个概念性的实验所指的压缩是等熵的压缩. 所以驻点量决不能用仪器直接测量. 在亚声速流中，用皮托管量得的压强只是驻点压强的近似值而已. 在超声速流里，由于皮托管前存在激波，所测压强较驻点压强低得多.

在比热为常数的完全气体，驻点量与静量之间的关系特别简单. 设M是当地马赫数，即是当地速度与当地声速之比，则

$$M^2 = \frac{|\mathbf{u}|^2}{\gamma(p/\rho)}.$$

按方程 (1.5), (5.7), (5.8), (5.9) 和 (7.11), 如假定 c_p 是常数，就有

$$\frac{T^0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \tag{7.26a}$$

然后用众所熟知的等熵过程的温度与压强之间的关系，即有

$$\begin{aligned} \frac{p^0}{p} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}, \\ \frac{\rho^0}{\rho} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}. \end{aligned} \tag{7.26b}$$

在完全气体，因为焓和温度成正比，故驻点焓和静焓之比就等于驻点温度和静温之比.

当地马赫数很低的时候，方程 (7.26) 可以展为 M^2 的级数，例如

$$\frac{p^0}{p} = 1 + \frac{\gamma}{2} M^2 + \frac{\gamma}{8} M^4 + \frac{\gamma(2 - \gamma)}{48} M^6 + \cdots,$$

所以

$$p^0 - p = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 \left(1 + \frac{1}{4} M^2 + \frac{2 - \gamma}{24} M^4 \cdots\right). \tag{7.27}$$

驻点压强和静压之差 $p^0 - p$ 是动压增量. 当M很小时，动压增量

近似地等于 $\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2$. 这个量常称为动压.

A.8. 理想气体的绝热流动. 伯努利方程

在前节的讨论里已经说过，在航空方面的大多数气体动力学问题，除边界层外，粘性和热传导的作用都可以略去不计. 此外，除有关燃烧的问题之外，外加热量不是零便是很小. 所以在普通条件之下，气体很象理想气体. 因此，气体动力学的基本问题之一是研究理想气体的绝热流动. 本节以下的讨论大部分是关于这个问题的.

设流动是无旋的，因而有一个速度势 $\phi(x_i, t)$ 存在，

$$\mathbf{u} = \nabla\phi, \tag{8.1}$$

则 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times (\nabla\phi)$ 自动为零. 动力学方程 (7.13) 变成

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho}\right) = 0,$$

这就是说括号中的量不是一个空间函数，但可能是时间的函数；这个时间函数可以包藏在 ϕ 的定义里，而不影响方程 (8.1) 所示关系. 所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \int\frac{dp}{\rho} = \text{const.}, \tag{8.2}$$

这是非定常无旋流的伯努利方程. 可以看作是动力学方程的第一次积分，它给出压強或密度和速度势之间的简单关系. 式中积分项必须按等熵的压強-密度关系计算，因为前面说过，无旋流通常只能在全流场中单位质量的熵为常数时才得保持. 在完全气体，方程(8.2)变成

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + h^0 = \text{const.}, \tag{8.3}$$

所以无旋流并不一定要均能，即全流场各点的总能 h^0 不一定相同. 只在定常流，即 $\partial\phi/\partial t = 0$ 时，无旋流才是均能的.

如果流动是有旋的话，也就是涡量不为零的话，一般的第一次积分不存在. 只有流动定常时，第一次积分才存在. 如前所示在

绝热流中，沿流体微团的迹线或沿流线的总能 h^0 是常数，但不同的流线可能有不同的数值。

$$\text{沿流线} \qquad h^0 = h + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = \text{const.}, \tag{8.4}$$

这实在是个能量方程，但在形式上和定常无旋流的伯努利方程一样，因为后者是均能的. 二者的差别当然在于，定常的均能流不一定是等熵的；而定常的无旋流却必定是等熵的. 举个例子来说，具有脱体弯曲激波的绕物体的定常超声速流是均能的但不均熵.

以上的讨论表明流动有四种特征，即定常性、有旋性、均熵性和均能性. 按这些特征来划分，理想气体的绝热流动有如下所示的八种可能，"+"号表示具有表内所示特征，"−"号表示沒有那种特征. 例如在定常性下的"+"号表示流动是定常运动，在有旋性下的"−"号表示流动是无旋运动.

类型	定常性	有旋性	均熵性	均能性
1	+	−	+	+
2	−	−	+	−
3	+	+	−	+
4	−	+	−	−
5	+	+	+	−
6	+	+	−	−
7	−	+	+	−
8	−	+	−	−

绕机翼的亚声速流，如为定常的则属第一类；非定常的属第 2 类. 流过机翼的跨声速流，如为定常的则属第 3 类；非定常的属第 4 类. 设绕物体定常流的自由流是非均匀的，即切变流，如果自由流的温度和压强是均匀的但速度分布不均匀，那末属第 5 类；否则属第 6 类. 如果此种流动是非定常的，则属第 7 或第 8 类.

如果运动的方程有第一次积分存在，那末流场的数学分析的复杂性大为减少. 上面说过，无旋流或定常流就存在第一次积分. 当然最简单的问题是定常无旋流，因而也就是均熵流. 将于以下各节详细讨论这几种流动.

A.9. 无旋流. 速度势

当流动是无旋流时,就有一个速度势 $\phi(x_i, t)$ 存在,而且动力学方程积分成为伯努利方程(8.2). 因为流动必然又是等熵的,所以能量方程和状态方程就给出三变数 p, ρ, T 之中任意两个之间的等熵关系. 从等熵关系和伯努利方程可以得到一个有速度势和包括热力学变数 p, ρ, T 之一在内的方程. 例如, 比热为常数的完全气体,如果远离物体处的流动是均匀定常流,且远离物体处的驻点条件也是均匀的,令驻点变数注以上标 0, 则

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^0}{\rho^0}\left(\frac{p}{p^0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^0}{\rho^0}=\frac{1}{\gamma-1}(a^0)^2, \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^0}{\rho^0}\left(\frac{\rho}{\rho^0}\right)^{\gamma-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^0}{\rho^0}=\frac{1}{\gamma-1}(a^0)^2, \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^0}{\rho^0}\left(\frac{T}{T^0}\right)=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p^0}{\rho^0}=\frac{1}{\gamma-1}(a^0)^2, \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2+\frac{1}{\gamma-1}a^2=\frac{1}{\gamma-1}(a^0)^2, \tag{9.4}$$

式中的 a 是声速, 定义见方程(1.4). 当速度势, 从而 $|\mathbf{u}|$ 都确定之后,利用上式就可以计算压強、密度和温度.

于是问题归结为求速度势. 因为伯努利方程是积分动力学方程和能量方程的结果, 所以唯一沒有用过的运动方程是连续方程(7.7), 该方程可以写为

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{u}+\frac{1}{\rho}\mathbf{u}\cdot\nabla\rho=0.$$

但运动又是均熵的,所以压強只是 ρ 的函数. 上式也可写为

$$\frac{1}{dp/d\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\frac{1}{\rho}\nabla p\right)+\nabla\cdot\mathbf{u}=0. \qquad (9.5)$$

而一般情况下，$dp/d\rho$ 只是和声速有关系，即方程(1.3)

$$\frac{dp}{d\rho}=a^2.$$

将伯努利方程对时间 t 微分，

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\mathbf{u}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t}=0, \qquad (9.6)$$

从这个方程可以解出 $(1/\rho)(\partial p/\partial t)$。将此结果代入 (9.5) 式，并用动力学方程消去 $(1/\rho)\nabla p$，方程(9.5)最后变成

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+2\frac{\mathbf{u}}{a^2}\cdot\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\frac{1}{a^2}\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}] \qquad (9.7)$$

或

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}+\frac{2}{a^2}u_i\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_i}+\frac{1}{a^2}u_iu_j\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j\partial x_i}, \qquad (9.8)$$

a^2 可以用以 ϕ 表示的伯努利方程来计算. 对于完全气体来说，a^2 由方程(9.4)给定. 如此说来方程 (9.8) 可以看作是仅仅一个未知量 ϕ 的方程. 这较之原始运动方程组是一个大简化.

当声速和流体的速度比起来十分大的时候，则方程(9.8)的右侧小到可以忽略，可以取为零. 于是

$$\nabla^2\phi=0, \quad a\to\infty. \qquad (9.9)$$

这是不可压流速度势的微分方程. 从数学上说来，方程(9.9)和一般方程(9.8)根本不同，方程(9.9)是未知函数 ϕ 的线性方程，而方程(9.8)却是非线性的. 所以解方程 (9.8) 的数学问题远较解相应的不可压流问题困难得多. 从物理上看，方程(9.9)表明无旋的不可压流的速度分布问题可以不用伯努利方程求解. 伯努利方程是在速度决定之后用来求压強 p 的. 事实上，方程(9.9)可以从连续方程和无旋条件去推得. 所以在无旋的不可压流，速度场仅仅为运动学条件所决定，和动力学问题完全沒有关系. 可压缩流就不是这样. 此处运动学问题和动力学问题紧密地连结在一起，因为

速度势 ϕ 的方程，即方程(9.8)，必须与伯努利方程同时求解。

可压流和不可压流的另一重要区别是所谓的"表观质量"* 问题，这是物体在远处静止的流体中作加速运动时表现出来的一个量。在不可压流，任何一瞬时的流场只为运动学的条件所决定，故物体加速运动所引起的瞬时流场和以此瞬时速度作定常运动的流场完全相同。只有在计算物体表面压強时，运动的非定常效应才通过伯努利方程里的 $\partial\phi/\partial t$ 项显示出来。但 ϕ 是和瞬时速度成正比的；所以加速度的附加压強效应与速度的时间变化率或物体的加速度成正比。积分物体表面压力即得作用在物体上的合力。所以由于加速度而来的附加力是正比于物体的瞬时加速度的。结果使物体四周的流体加速的效应可以看作是有一额外质量和物体一起运动。此附加质量常称之为表观质量，它是一个和加速度无关的常数，而只决定于物体的形状。这就大大简化物体在流体中作加速运动的计算。从物理上看来，这个简化实际是扰动在不可压流体里瞬时传遍全场的结果。因此加速度的效应完全为该物体的瞬时加速度所决定。在可压流中，扰动的传播速度是有限的；运动的历史并不能立即不起作用。因此在某一瞬时，加速度的效应不仅为该瞬时情况所决定，而且为前此一系列的情况所决定。于是加速度的效应就和物体的瞬时加速度很少有关系了，而表观质量的概念就沒有什么用处。

如果运动是定常的，所有对时间的导数都等于零。这时速度势的方程(方程 9.8)变成

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{a^2} u_i u_j \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j \partial x_i}, \tag{9.10}$$

声速 a 仍可用伯努利方程计算，现在该方程中去掉了 $\partial\phi/\partial t$ 项。对二维流可以令 $x = x_1$, $y = x_2$; $u = u_1$, $v = u_2$, 方程(8.10)变成

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - 2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \tag{9.11}$$

* "表观质量"在许多苏联书上称为附加质量——译者注。

A.10. 无旋流的变分法

无旋流问题除了从微分方程(9.8)求解速度势 ϕ 之外，还有可能形成一个变分问题，所谓变分问题是 ϕ 的某个积分在 ϕ 作微小的虚变化 (Virtual variation)时应该有个逗留值 (Stationary value)。这样一种作法首先由贝特门 (Bateman)[11] 提出，后来为王启德(C. T. Wang)[12] 所推广。

为了明确起见，考虑求解包围在固定固体空间边界中的一种非定常的无旋均熵流。在初始时刻 $t = t_1$，在这个空间边界內的速度分布是给定的。在终了时刻 $t = t_2$，空间边界內的速度分布也是给定的。在 t_1 或 t_2 时压強或密度分布都沒有给定，而是必须求出来的。既然 t_1 和 t_2 时的速度分布给定了，在 t_1 和 t_2 时 ϕ 的梯度就是给定了，那末在 t_1 和 t_2 时边界以內空间每一点上的 ϕ 本身的値除了一个常数之外也是给定的。可以取常数为零，而不致改变问题。换句话说，问题已变换为这样：在 t_1 和 t_2 时 ϕ 是给定了的，同时 $(\partial\phi/\partial x_i)\,n_i$ 在边界上必须永为零，n_i 是边界的单位法向矢。现在考虑积分

$$I = \iiiint p\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt, \tag{10.1}$$

此式积分及于固体边界內的空间并从 $t = t_1$ 积分到 $t = t_2$。p 是压強，从伯努利方程(8.2)按速度势 ϕ 计算。贝特门的说法是，流动问题等于求这个积分 I 的逗留值，即

$$\delta I = 0. \tag{10.2}$$

因为伯努利方程是从动力学方程用了速度势 ϕ 推导的结果，无旋条件已经是满足了的，唯一的沒有用到的方程是连续方程(2.5)。要证明贝特门的说法就是要证明方程(10.2)和连续方程(2.5)是等价的。利用伯努利方程(9.1)，方程(10.1)成为

$$I = p^0 \iiiint \left\{1 - \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)\frac{\rho^0}{p^0}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\right]\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \times dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt. \tag{10.3}$$

如给 ϕ 一个虚变量 $\delta\phi$，则

$$\delta I = -\rho^0 \iiiint \left\{1 - \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\frac{\rho^0}{p^0}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right)\right]\right\}^{\frac{1}{\gamma-1}} \times \left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x_i}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt.$$

按(9.2)形式的伯努利方程看来，这个积分的被积式的第一个因子等于密度 ρ. 故

$$\delta I = -\iiiint \rho\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x_i}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt. \qquad (10.4)$$

但

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right) - \delta\phi\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right).$$

所以方程(10.4)可以作如下变换,第一项对 t 作分部积分，第二项用方程(3.1)的斯道克斯定理作变换. 结果是

$$\delta I = -\iiint (\delta\phi\rho)_{t=t_1}^{t=t_2} dx_1\, dx_2\, dx_3 - \int dt \int dA(\delta\phi u_i n_i) + \iiiint \delta\phi\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3\, dt, \qquad (10.5)$$

式中的面积分是沿固体边界表面进行的. 第一个积分为零，因为 t_1 和 t_2 时的 ϕ 是给定了的，所以在 t_1 和 t_2 时，一切空间点的 $\delta\phi$ 都为零. 第二个积分也是零，因为在边界的表面上 $u_i n_i = 0$. 所以方程(10.2)的定义不过是方程 (10.5) 的第三个积分必须等于零而已. 但除了在 t_1 和 t_2 时之外，$\delta\phi$ 是任意的；故方程(10.2)只有在连续方程得到满足时，即

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u_i}{\partial x_i} = 0$$

时，才可能成立. 这就证明了贝特门的说法.

至于定常流问题，不必规定 t_1 和 t_2 时的 ϕ，积分 I 简化成为

$$I = \iiint p\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \qquad (10.6)$$

式中 p 是用伯努利方程作计算的，当然该式中的 $\partial\phi/\partial t$ 项是不存

在的.

变分方程(10.2)的应用就是用直接的瑞利 (Rayleigh) 与李兹 (Ritz) 的变分法去计算流动. 要点是选取一个函数近似地表达眞正的速度势 ϕ, 所选函数要满足边界条件以及 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 时的条件, 而且还得包含几个任意常数. 运算的过程包含把近似函数代入方程(10.1)或(10.6)里去, 视非定常流还是定常流而定, 然后积分之. 这样一来,积分 I 就成了近似函数的未定常数的函数. 最后用方程(10.2)定这些常数. 这样定得的含有常数的函数就是眞实速度势的近似表达式.

王启德曾发现应用变分法于无限空间的定常流必须克服两重困难. 第一个困难是,这时积分(10.6)是无限大,因而上述变分问题的处理是不恰当的. 第二个困难是, 方程 (10.5) 里的面积分现在不等于零, 因为曲面本身是无限大. 第一个困难在亚声速流这样克服: 在方程(10.1)中被积式不用 p 而用 p 和对应的不可压流中的 $p_{\rm inc}$ 二者之差,即用

$$I=\iiint (p-p_{\rm inc})\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \tag{10.7}$$

如果不可压流的解是已知的,那末 $p_{\rm inc}$ 的积分是个固定的值,所以用差来代 p 并不改变上面关于 δI 的推理. 但这样的技巧就使那个积分变成有限的了. 第二个困难这样克服, 用速度势的近似函数去实际算出(10.5)式中的面积分来,然后用它去修改方程(10.7)的积分, 使改变后的积分之变分恰能对消方程 (10.5) 中的麻烦的面积分(详情请参看[12]).

A.11. 绝热定常流

前一节里证明过,在理想气体的绝热定常流里,沿流线总能或驻点焓 h^0 是常数. 那末 ∇h^0 必是一个与流动方向垂直的向量. 但按方程(7.18)看,定常流必有

$$\mathbf{u}\times\mathbf{\Omega}=\nabla h^0-T\nabla s, \tag{11.1}$$

所以向量 $(\nabla h^0-T\nabla s)$ 是垂直于流动方向的. 不过, ∇h^0 已经垂

直于流动了，所以 ∇s 也必垂直于流动方向．结果沿流线的熵也必是常数．激波之类的突跃变化当然是例外．这种突跃面出现时，熵也作突跃地变化．因此，在激波与激波之间，沿一条流线的定常绝热流还是等熵的，虽然各条流线的熵值也许不相同．这时流线就具有各自的驻点焓 h^0 和熵值 s．不用驻点焓，而用“最大速度” u_{max} 亦可．u_{max} 的定义是

$$h^0 = \frac{1}{2} u_{max}^2. \tag{11.2}$$

所以 u_{max} 是气体的焓或温度等于零时的气体流速，也就是能量全部转变成动能时的流速．当然沿任何一条流线 u_{max} 都是常数．

现在用最大速度 u_{max} 除 $\mathbf{u}$，除出来的无量纲向量记为 $\mathbf{W}$；$\mathbf{W}$ 可以叫做减缩速度矢：

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{u}}{u_{max}}. \tag{11.3}$$

用能量方程(方程 8.4)得

$$\frac{h}{h^0} = 1 - W^2, \tag{11.4}$$

式中的 $W^2 = \mathbf{W} \cdot \mathbf{W}$，或 $\mathbf{W}$ 的绝对值的平方．设 ρ^0 为驻点密度(其沿流线之值也为常数)，则连续性方程是

$$\begin{aligned} 0 = \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= \nabla \cdot \left[(\rho^0 \sqrt{2h^0}) \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right) \mathbf{W} \right] \\ &= \rho^0 \sqrt{2h^0} \nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho}{\rho^0} \right) \mathbf{W} \right] + \left(\frac{\rho}{\rho^0} \right) \mathbf{W} \cdot \nabla (\rho^0 \sqrt{2h^0}), \end{aligned}$$

$\rho^0 \sqrt{2h^0}$ 沿流线是常数；所以它的梯度必垂直于速矢或 $\mathbf{W}$．因此上式右侧第二项是零．从而

$$\nabla \cdot \left[\left(\frac{\rho}{\rho^0} \right) \mathbf{W} \right] = 0. \tag{11.5}$$

对于完全气体来说，利用上方程(11.4)可将方程(11.5)写为

$$\nabla \cdot [(1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} \mathbf{W}] = 0. \tag{11.6}$$

现在动力学方程变成

$$(\mathbf{W}\cdot\nabla)\mathbf{W}+\frac{\gamma-1}{2\gamma}(1-W^2)\nabla\ln p=0. \qquad (11.7)$$

如果不用向量 $\mathbf{W}$，而用当地声速除速度矢 $\mathbf{u}$，或对完全气体来说用$\sqrt{\gamma p/\rho}$除速度矢，那就得另一个无量纲向量，即马赫数向量 $\mathbf{M}$. 用新向量表示，则完全气体的连续方程和动力学方程成为

$$\nabla\cdot\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}\mathbf{M}\right]=0, \qquad (11.8)$$

$$(\mathbf{M}\cdot\nabla)\mathbf{M}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\mathbf{M}(\nabla\cdot\mathbf{M})+\frac{1}{\gamma}\nabla\ln p=0. \qquad (11.9)$$

向量 $\mathbf{W}$ 和 $\mathbf{M}$ 为孟克（Munk）和浦黎姆（Prim）[13]，希克斯(Hicks)、顾恩特（Guenther）和瓦瑟曼（Wasserman）[14] 等所引用的. 在每一情况下，连续方程和动力学方程总是解两个未知数 $\mathbf{W}$ 和 p 抑或 $\mathbf{M}$ 和 p 的方程组. 不过应注意，在方程(11.6)和(11.7)或(11.8)和(11.9)中驻点焓都没有显式地出现. 而方程(11.6)和(11.7)或方程(11.8)和(11.9)的一个解确实是包含了相当于给各条流线以不同驻点焓值的一族解的. 但每一族解的 p 是一样的，和所给的驻点焓值无关. 譬如，若已知绕某给定物体和给定流线间焓值分布的定常流场，那末改变驻点焓值分布的话，只要把速度场乘一个常数就行了，这个常数等于两种驻点焓值之比的平方根. 同一个压強场仍能保持流动平衡.

对于完全气体，方程(11.1)用 $\mathbf{W}$ 表达则为

$$\frac{\mathbf{W}\times(\nabla\times\mathbf{W})}{1-W^2}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\nabla\ln p^0, \qquad (11.10)$$

式中的 p^0 是驻点压強，沿一条流线仍是常数. 就方程(11.10)取旋度，即得克罗柯（Crocco）方程:

$$\nabla\times\left[\frac{\mathbf{W}\times(\nabla\times\mathbf{W})}{1-W^2}\right]=0, \qquad (11.11)$$

这个方程克罗柯在文献[9]中第一次为均能流而推导的.

作用在等速运动的物体上的力. 现在应用第4节中的积分定理来计算一下作等速运动的物体所受的力、力矩和热传导，积

分沿包围物体的控制面 A_1 进行．计算用的方程是方程(4.10)，(4.11)和(4.12)．如将控制面 A_1 取成一个远离物体的大曲面，远到使压强、密度、温度和速度在那里随空间坐标的变化已十分缓慢，这些量的梯度是如此之小以至于在 A_1 上的粘性应力和热通量都可以略去不计．这也就是说，在 A_1 面上，边界层和激波的效应已经扩散到只剩下物体后面的一条宽宽的尾迹了．这时方程(4.10)，(4.11)和(4.12)变成

$$F_i = -\int_{A_1} [pn_i + \rho u_i(u_j n_j)]\, dA, \tag{11.12}$$

$$M_i = \int_{A_1} \delta_{ijk}[px_j n_k + \rho x_j u_k(u_l n_l)]\, dA, \tag{11.13}$$

$$H = -\int_{A_1} \rho\left(h + \frac{1}{2} u_i u_i\right) u_i n_i\, dA, \tag{11.14}$$

式中的 F_i, M_i, H 分别是作用在物体上的各分力、绕各坐标轴的力矩以及传给物体的热量．另外还有一个从方程(4.2)来的连续方程

$$\int \rho u_i n_i\, dA = 0. \tag{11.15}$$

现在令 p_∞, ρ_∞, T_∞, h_∞ 代表物体远前方的均一压强、密度、温度和单位质量的焓值，也就是未经扰动的各量．令 U 代表未扰自由流的速度(x_1 方向)，并记上述各物理量与均一值之差为 $\delta p, \delta u_1$, δh 等．则物体的阻力或 F_1 便是

$$F_1 = \int_{A_1} (p_\infty + \delta p) n_1\, dA - \int_{A_1} (U + \delta u_1)\rho u_i n_i\, dA.$$

$p_\infty n_1$ 在闭曲面 A_1 上的积分为零．再根据连续性方程(11.5)并 U 为常数的事实，$U(\rho u_i n_i)$ 在曲面 A_1 上的积分也是零．此外，在 A_1 上，流动情况和均一情况相差极微，只需考虑一次微量就行了．结果阻力 F_1 成为

$$F_1 = -\int_{A_1} (\delta p + \rho_\infty U \delta u_1) n_1\, dA. \tag{11.16}$$

方程(11.14)经类似的变化成为

$$H = -\int_{A_1} \rho_\infty U(\delta h + U\delta u_1) n_1 \, dA. \qquad (11.17)$$

从方程(11.16)和(11.17)中消去 δu_1，得

$$UF_1 - H = \int_{A_1} \rho_\infty U \left(\delta h - \frac{\delta p}{\rho_\infty}\right) n_1 \, dA. \qquad (11.18)$$

如 s_∞ 代表物体远前方的均一的单位质量熵值，δs 代表在 A_1 曲面上 s 和 s_∞ 的差，那末现在按小量偏离的近似计算得

$$T_\infty \delta s = \delta h - \frac{\delta p}{\rho_\infty}. \qquad (11.19)$$

代方程(11.19)入方程(11.18)，

$$UF_1 - H = T_\infty \int_{A_1} \rho_\infty U \delta s n_1 \, dA.$$

另一方面，用连续性方程很容易证明下列的关系：

$$\int_{A_1} \rho s (u_i n_i) \, dA = \int_{A_1} \rho_\infty U \delta s n_1 \, dA,$$

故最后得

$$UF_1 - H = T_\infty \int_{A_1} \rho s (u_i n_i) \, dA. \qquad (11.20)$$

方程(11.20)首先为奥斯瓦梯契 (Oswatitsch)[15] 得出，这是条很有用的定理：阻力与物体运动速度的乘积减去物体所吸收的热量等于自包围物体的一个大控制面流出的熵通量乘以自由流的温度．不过，要这条定理成立，控制面必须取得足够大，大到能把所有能量耗散过程尽包在里面，如边界层尾迹和激波．其实这条定理是按流动情况和均匀未扰流相差极微的假设推导出来的，故不能用于具有有限熵突跃的集中尾流．在使用这条定理时，必须牢记这一限制．

在无粘、无热传导、无激波的理想可压流里，物体所吸收的热量 H 等于零．此外，流动又必是均熵的；故熵通量为零．所以在这种场合，就方程(11.19)的近似程度说来，阻力是没有的．这就是所谓的**达朗培疑题**，是西奥道生 (Theodorsen)[16] 首先提出讨论可压缩流的达朗培疑题的．不过，在跨声速流和超声速流里总有激波出现的，所以对可压流来说，达朗培疑题远不如在不可压流里那

未有力．当然，对于具有尾涡的流动，例如流过机翼的三维流动来说，这时方程(11.19)的近似就不够了，即使沒有激波，三维机翼的阻力也不是零．

A.12．二维定常均能流．流函数

流场出现曲线激波时，流动可以是定常均能的，但不均熵，例如绕跨音速飞行物体并具有离体激波的流动就是如此．这时全流场的驻点焓值都是一个常数，等于远离物体处的均一焓值．但流场里的熵是因流线而异的．用方程(11.16)和(11.11)，得

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla \times \left\{[(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}\mathbf{W}] \times \left[\frac{\nabla \times \mathbf{W}}{(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}\right]\right\} \\
&= \left[\frac{\nabla \times \mathbf{W}}{(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}} \cdot \nabla\right](1-W^2)^{1/(\gamma-1)}\mathbf{W} \\
&\quad - [(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}\mathbf{W} \cdot \nabla]\frac{\nabla \times \mathbf{W}}{(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}} \\
&\quad + (1-W^2)^{1/(\gamma-1)}\mathbf{W}\left[\nabla \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{W}}{(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}\right].
\end{aligned} \tag{12.1}
$$

二维流的 $\nabla \times \mathbf{W}$ 只有一个分量，它垂直于流动平面．所以上式右侧只有第二项不恒等于零．换句话说，如果 u 和 v 是 $\mathbf{W}$ 在 x 和 y 方向的两个分量，则方程(12.1)变成

$$
\left(u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}\right] = 0. \tag{12.2}
$$

现在均能流的减缩速度向量 $\mathbf{W}$ 和物理流速向量 $\mathbf{u}$ 的差异在于一个常数因子．所以方程(12.2)可以解释为涡強除以$(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}$所得的商沿流线为常数．只要沒有激波之类的突跃面存在，$(1-W^2)^{\gamma/\gamma-1}$便和当地压強成正比．所以，在定常二维均能流中，沿任何一根流线，涡強是直接与当地压強成正比的．这条定理是克罗柯提出来的[9]．

按克罗柯的办法定义流函数为

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(1 - W^2)^{1/(\gamma-1)}, \tag{12.3}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v(1 - W^2)^{1/(\gamma-1)}.$$

这样一来连续性方程(11.6)自动满足. 流函数为常数的曲线是流线. 令 dn 代表两条相邻的流线 ψ 和 $\psi + d\psi$ 之间的距离，则由方程(12.3)得

$$d\psi = (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)}\, W\, dn = \frac{\rho}{\rho^0} W\, dn.$$

因此，$\rho W\, dn$ 或 $\rho^0\, d\psi$ 是和流线之间的质量流量成正比的. 但各条流线的熵 s 不同，不同流线上的 ρ^0 也各不相同. 所以 $d\psi$ 本身不直接代表 ψ 和 $\psi + d\psi$ 两条流线之间的质量流量的. 这样一来，当流动越过激波时，由于熵和驻点密度 ρ^0 有突变，结果 ψ 值便有突跃. 方程(12.3)所定义的流函数有突跃就可能造成不便. 陶尔明(Tollmien)[17] 试图补救此缺点，另外引用一个流函数 ψ'，ψ' 和克罗柯的 ψ 有如下的关系

$$d\psi' = \rho^0 d\psi.$$

这样一来，ψ' 在越过激波时就连续了，但 ψ' 的方程却十分复杂.

前一段已经说过，方程(12.2)意味着

$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1 - W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}} = f(\psi). \tag{12.4}$$

为了解函数 $f(\psi)$ 的物理意义可以就现在这个问题把方程 (11.1) 分析一下. 设 n 是流线的法线；当 n 与速度矢的相对位置和 y 与 x 的相对位置一样时，则 n 是正向. 那末方程(11.1)给出

$$W\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{2c_p}(1 - W^2)\frac{ds}{dn}.$$

而按流函数的定义(方程 12.3)

$$W(1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} = \frac{d\psi}{dn},$$

故

$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}}{(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}=f(\psi)=\frac{1}{2c_p}\frac{ds}{d\psi}, \tag{12.5}$$

所以 $f(\psi)$ 和熵值跨流线的变化率成正比．如果整个流场是均熵的，则 $ds/d\psi$ 为零，这时涡必为零，流动是无旋的．

用流函数代替方程(12.5)中的分速导数，得 ψ 的方程如下（详情参看[9]）：

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$
$$=(1-W^2)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}\left(\frac{W^2}{c^2}-1\right)f(\psi), \tag{12.6}$$

此处 $f(\psi)$ 由方程(12.5)给出，c 是当地声速和最大速度 $u_{\max}$ 之比，或

$$c^2=\frac{a^2}{u_{\max}^2}=\frac{\gamma-1}{2}(1-W^2), \tag{12.7}$$

又从方程(12.3)得

$$W^2(1-W^2)^{2/(\gamma-1)}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2. \tag{12.8}$$

当给定熵的梯度 $ds/d\psi$ 之后，譬如说由曲线激波给定，方程(12.6)便是流函数的一个非线性方程．

变分法． 和第 10 节讲的无旋流问题一样，上面讨论的二维有旋流也可以用变分法求解．拿下列的积分来看：

$$I=\iint\limits_A e^{-s(\psi)/\mathscr{R}}(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}\left(1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}W^2\right)dx\,dy, \tag{12.9}$$

式中的 W^2 由方程(12.8)给出，积分域 A 为流线及与流线相垂直的曲线所围成． 变分法的基础是使 δI 在流函数 ψ 作一切虚变化时都为零，即

$$\delta I=0. \tag{12.10}$$

这和使 ψ 满足微分方程(12.6)或更原始的方程(12.5)是完全一样的．这个说法的证明如下：

$$\delta I = \iint_A e^{-s(\psi)/\mathscr{R}} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{(1 - W^2)^{1/(\gamma-1)}}{1 - W^2} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} W^2 \right) \delta W^2 \right.$$
$$\left. - (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} W^2 \right) \frac{1}{\mathscr{R}} \frac{ds}{d\psi} \delta\psi \right] dx\, dy, \tag{12.11}$$

但流函数的定义(方程 12.3)给出下列的关系式:

$$\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial y} = \delta u (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} - \frac{u}{\gamma - 1} (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)-1} \delta W^2,$$

$$-\frac{\partial(\delta\psi)}{\partial x} = \delta v (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} - \frac{v}{\gamma - 1} (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)-1} \delta W^2.$$

第一式乘以 u, 第二式乘以 v, 然后相加即得

$$\delta W^2 \frac{(1 - W^2)^{1/(\gamma-1)}}{1 - W^2} \left(1 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} W^2 \right) = 2 \left(u \frac{\partial\delta\psi}{\partial y} - v \frac{\partial\delta\psi}{\partial x} \right),$$

所以方程(12.11)可以写成

$$\delta I = \iint_A e^{-s(\psi)/\mathscr{R}} \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(u \frac{\partial\delta\psi}{\partial y} - v \frac{\partial\delta\psi}{\partial x} \right) \right.$$
$$\left. - (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} W^2 \right) \frac{1}{\mathscr{R}} \frac{ds}{d\psi} \delta\psi \right] dx\, dy,$$

这个方程可以用分部积分变成

$$\delta I = \iint_A e^{-s(\psi)/\mathscr{R}} \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right.$$
$$+ \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\mathscr{R}} \frac{ds}{d\psi} \left(u \frac{\partial\psi}{\partial y} - v \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)$$
$$\left. - \frac{1}{\mathscr{R}} \frac{ds}{d\psi} (1 - W^2)^{1/(\gamma-1)} \left(1 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} W^2 \right) \right] \delta\psi\, dx\, dy$$
$$- \oint_C e^{-s(\psi)/\mathscr{R}} \left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \right) \delta\psi \mathbf{W} \cdot d\mathbf{l},$$

线积分是沿 A 域的边界线进行的，而这个边界线是由流线及与流线相垂直的曲线围成的. 在流线上, $\delta\psi$ 为零. 在与流线相垂直的曲线上, $\mathbf{W} \cdot d\mathbf{l}$ 等于零. 所以围道积分为零. 面积分中的导数

$\partial\psi/\partial x$, $\partial\psi/\partial y$ 都可以通过方程(12.3)表为速度．于是

$$\delta I=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\iint_{A} e^{-s(\psi)/\mathscr{R}}\left[\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2c_p}(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}\frac{ds}{d\psi}\right]\delta\psi\,dx\,dy. \tag{12.12}$$

因 $\delta\psi$ 在 A_1 域里是任意的，而指数因子又不可能等于零，所以(12.10) 式条件要求方程 (12.12) 方括号中的式子在区域 A 为零．可见方程(12.10)是与方程(12.5)和(12.6)等价的．

最近，克罗柯[18]为二维定常不均熵然而均能的流动引进一种新的势函数 φ．φ 的定义如下：

$$p+\rho u^2=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2},\quad \rho uv=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y},\quad p+\rho v^2=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}. \tag{12.13}$$

把这些关系代入动力学方程，动力学方程恆等地满足．φ 的好处在于它越过激波时是连续的．不过从连续性方程推导出来的 φ 的微分方程却是个非线性的三阶方程．

轴对称流． 对于轴对称流，最方便的坐标系是 x 和 r 的柱坐标系（x 沿对称轴，r 与此轴垂直）．令减缩速度 $\mathbf{W}$ 在 x 和 r 两个方向的分量为 u 和 v，那末流函数可以这样定义(参看方程 12.3)

$$ru(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}=\frac{\partial\psi}{\partial r},\ rv(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}=\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{12.14}$$

克罗柯发现，现在在两突跃面之间，沿一条流线，涡強正比于当地压強 p 及 r 的乘积．现在涡的方程是

$$\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}}{r(1-W^2)^{\gamma/(\gamma-1)}}=f(\psi). \tag{12.15}$$

流函数的方程是

$$\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial r}+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$
$$=r^2(1-W^2)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}\left(\frac{W^2}{c^2}-1\right)f(\psi), \tag{12.16}$$

式中的函数 $f(\psi)$ 和梯度 $ds/d\psi$ 的关系仍是方程(12.5)，c^2 见方程

(12.7). 对应于方程(12.8)的减缩速度与流函数的关系式是

$$r^2W^2(1-W^2)^{2/(\gamma-1)}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2. \qquad (12.17)$$

本问题也可以用下列的积分形成一个变分问题

$$I=\iint e^{-s(\psi)/\mathscr{R}}(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}\left(1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}W^2\right)r\,dx\,dr, \quad (12.18)$$

式中的 W 和 ψ 的关系见方程(12.17),积分域为 A, A 域由流线及与流线相垂直的曲线所围成. 方程(12.15)或(12.16)等于要求积分 I 在流函数 ψ 作虚变化时有逗留值.

非均能流. 上面用流函数 ψ 处理均能流的办法可以很容易地推广到非均能流. 事实上,如果用减缩速度 $\mathbf{W}$ 及其分量 u,v 的话,那末流函数的定义方程(12.3), ψ 的方程(12.6)以及辅助方程(12.1)和(12.8)仍均有效. 但函数 $f(\psi)$ 就不是如方程(12.5)所示,替代它的是由方程(11.10)而来,现在变成

$$f(\psi)=-\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{d\ln p^0}{d\psi}. \qquad (12.19)$$

轴对称流也是这样. 当然在非均能流里,不同流线的最大速度 $u_{\max}$ 是各不相同的,而减缩速度 $\mathbf{W}$ 及其分量 u 和 v 与物理流速 $\mathbf{u}$ 及其分量的差别也不是一个常数因子了. 如此说来,不能将 $(\partial v/\partial x)-(\partial u/\partial y)$ 理解为与流体的涡量成正比的量了.

A.13. 二维定常无旋流. 速度面变换

如果熵的梯度 $ds/d\psi$ 为零,流动就是无旋的均熵的. 这时方程(12.6)的右侧是零. 这时由于方程(11.4)的关系而得

$$(1-W^2)^{1/(\gamma-1)}=\frac{\rho}{\rho^0}, \qquad (13.1)$$

式中的 ρ^0 是驻点密度. ρ^0 现在不仅沿一条流线是常数,而且在整个流场都是常数. 利用方程(13.1),流函数的定义变成

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho^0}u, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho^0}v. \qquad (13.2)$$

这时,两条流线的 ψ 值之差就真正代表二者之间的质量流量. 在

方程(12.2)中,减缩分速 u, v 便可以看作是物理的分速,因为只差一个常数因子. 这时 c^2 就是 a^2. 于是方程(13.2)所定义的流函数 ψ 在二维定常无旋流里的方程便是

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0. \qquad (13.3)$$

比较方程(13.3)和(9.11),即可看到势函数 ϕ 和流函数 ψ 满足同一形式的方程. 当然 ϕ 的方程和 ψ 的方程实际的内容是不相同的; u, v 和 ϕ 之间的关系以及 u, v 和 ψ 之间的关系是大不相同的. 例如方程(13.1)可以写成

$$\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{|\mathbf{u}|^2}{(a^0)^2}\right)^{1/(\gamma-1)}=\frac{\rho}{\rho^0}, \qquad (13.4)$$

这里面的 a^0 是对应于驻点条件的声速,而方程(12.8)是

$$\left(\frac{\rho}{\rho^0}\right)^2 q^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2. \qquad (13.5)$$

自方程(9.4)得对应于方程(12.7)的关系为

$$a^2=(a^0)^2-\frac{\gamma-1}{2}|\mathbf{u}|^2. \qquad (13.6)$$

方程(9.11)和(13.3)都是非线性的微分方程,很难求解. 最有效的办法是先把方程线化, 然后求解线化方程. 把方程线化有三种方法可用. 第一种方法是瑞利和詹森 (Janzen) 提出的,把解展为 M_∞^2 的幂级数, M_∞ 是远离物体的均匀流马赫数. 零级解就是不可压流的解,这种方法在 M_∞ 很小时是适用的.

第二种方法把解展为"厚度比"以及物体轴线与远离物体均匀流之间的倾斜角的升幂级数. 厚度比是指物体在主流横断方向的厚度与物体沿主流方向的最大尺寸之比. 这种方法适用于亚声速或超声速流中的细长体和薄物体. 其一级近似为葛劳渥(Glauert)、普朗佗和阿克里特 (Ackeret) 等所发展 (详情请参看第 VI 第 VII 卷).

第三种线化的方法是以分速 u 和 v 或以等价的 $V=|\mathbf{u}|$ 和 $\mathbf{u}$ 对 x 轴的斜角 θ 作自变数来变换方程, 这就是速度面法. 以 V 和

θ 作自变数的势函数 ϕ 的方程以及流函数 ψ 的方程可以直接推导如下[19]:

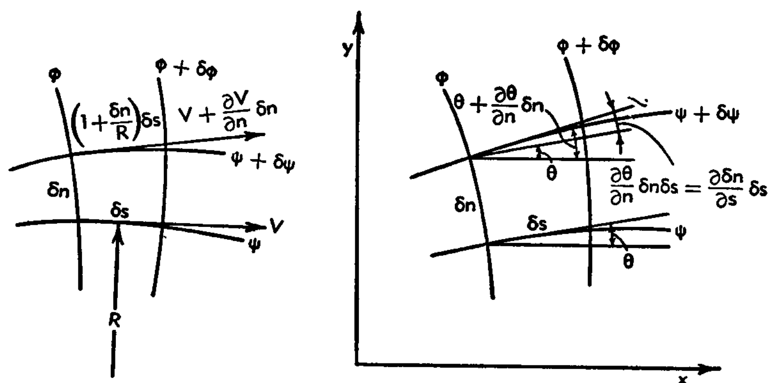


图 A.13

拿相邻的两条等势线 ϕ 和 $\phi+\delta\phi$ 以及相邻的两条流线 ψ 和 $\psi+\delta\psi$ 所组成的网格来看．沿等势线距离记为 n，沿流线距离记为 s．设流线的曲率半径为 R（图 A.13），则无旋条件是

$$-\frac{\partial V}{\partial n}-\frac{V}{R}=0,$$

但 $1/R=-\partial\theta/\partial s$；故

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial n}-\frac{\partial\theta}{\partial s}=0. \tag{13.7}$$

连续条件要求沿 ψ 与 $\psi+\delta\psi$ 的微元流管，$\rho V\delta n=\text{const.}$，即

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial s}+\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{1}{\delta n}\frac{\partial\delta n}{\partial s}=0. \tag{13.8}$$

但动力学方程要求

$$\rho V\frac{\partial V}{\partial s}=-\frac{\partial p}{\partial s}=-a^2\frac{\partial\rho}{\partial s},$$

所以

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial s}+\frac{1}{q}\frac{\partial V}{\partial s}=(1-M^2)\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s},$$

此处 M 是当地马赫数 V/a，而 a 是当地声速．但图 A.13 又表明

$$\frac{1}{\delta n}\frac{\partial \delta n}{\partial s}=\frac{\partial \theta}{\partial n},$$

所以方程(13.8)变成

$$(1-M^2)\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s}+\frac{\partial \theta}{\partial n}=0. \tag{13.9}$$

现在 $d\phi=V ds$, $d\psi=(\rho/\rho^0)V\,dn$; 所以方程(13.7)和(13.9)可以写成

$$\frac{\rho}{\rho^0}\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \psi}-\frac{\partial \theta}{\partial \phi}=0 \tag{13.10}$$

及

$$(1-M^2)\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial \phi}+\frac{\rho}{\rho^0}\frac{\partial \theta}{\partial \psi}=0. \tag{13.11}$$

取 V 和 θ 以代替 ϕ 和 ψ 作自变数，则下列各关系式成立:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \psi}&=\frac{1}{J}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \psi}=-\frac{1}{J}\frac{\partial \phi}{\partial V},\\ \frac{\partial V}{\partial \phi}&=-\frac{1}{J}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \phi}=\frac{1}{J}\frac{\partial \psi}{\partial V},\end{aligned} \tag{13.12}$$

此处 J 是雅科毕（Jacobian）式:

$$J=\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(V,\theta)}=\frac{\partial \phi}{\partial V}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}-\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\frac{\partial \psi}{\partial V}.$$

将方程(13.12)代入方程(13.10)和(13.11)，得基本的速度面方程如下:

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{\rho^0}\frac{1}{V}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}&=\frac{\partial \psi}{\partial V},\\ \frac{\partial \phi}{\partial V}&=-(1-M^2)\frac{\rho^0}{\rho}\frac{1}{V}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}.\end{aligned} \tag{13.13}$$

这两个方程现在是线性的了，因为密度 ρ 和马赫数 M 都只是 V 的函数。从这两个方程里消去 ψ 或 ϕ，即得 ϕ 或 ψ 的线性方程。这些详细的推导见第 VI 卷 F 编。

轴对称流. 无旋轴对称流的流函数 ψ 的方程可以从方程(12.13)，(12.16)和(12.17)推得。于是

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\rho}{\rho^0}ru,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\rho}{\rho^0}rv,\tag{13.14}$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho^0}\right)^2 r^2V|\mathbf{u}|^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\tag{13.15}$$

及

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial r}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0.\tag{13.16}$$

速度势 ϕ 的方程是

$$\left(1-\frac{u^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-2\frac{uv}{a^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial r}+\left(1-\frac{v^2}{a^2}\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}=0.\tag{13.17}$$

方程(13.16)和(13.17)又不是线性的. 瑞利-詹森的线化法以及把解展为厚度参数的级数的方法在这里仍可用. 不好的是, 速度面变换法现在不能把 ϕ 和 ψ 的方程线化了.

A.14. 对完全气体律的偏离

在前几节的讨论中常常假定气体是完全气体, 然而有许多方程是写成在一般情况下也成立的形式的. 事实上,只要方程里不包括 c_v, c_p 或 γ 的话,那就是一般的方程. 如果包括这些参数,那就是适用于完全气体的方程. 这里应该強调指出, 流体可以是理想的,即无粘性又不传热, 但却不是完全气体, 完全气体是必须符合状态方程 (5.7) 的. 例如,在激波和边界层之外, 粘性和热传导的效应都可以略去不计,然而假如压強十分高,温度很高或者反之温度非常低,那末气体的性质是和完全气体的性质有明显的偏离的. 高超声风洞的喷管中的流动,就是这种流动的一个例子,由于膨胀比十分巨大, 喷管中发生了很极端的情况. 这种偏离和由有一定变化率的过程所产生的效应完全不同, 即与调整到热力学平衡的过程所产生的效应完全不同. 另一方面, 粘性和热传导就是以有限变化率调整到热力学平衡的作用结果, 因而即使在完全气体里

也能出现.

有两种偏离完全气体律的情况：气体可以很准确地符合完全气体的状态方程，但比热可以不是常数，这种气体在热学上是完全的，但是在热量关系上是非完全的气体．或者气体可以具有常比热，但却不符合完全气体的状态方程；这种气体在热量关系上是完全的，但在热学上是非完全的．把这两种不完全加以区分是很有理由的．如果气体的密度不大，分子之间的平均距离比较大，在这样的平均距离上，分子之间的相互作用可以略去不计，那末状态方程就是完全气体的状态方程．另一方面，等容比热是为分子的各种量子状态之间的內能统计分布所决定的，温度高于或低于室温，比热都可能偏离常数値相当大．在十分低温下，比热下降，因为这时分子的旋转自由度未受激发；在十分高温下，比热上升，因为分子的振动自由度被激发．所以气体在热量关系上的非完全性是气体分子內部特殊结构的结果．在近于室温的温度之下，沒有这些效应；但如果气体的密度很大，因而分子之间的平均距离变得很小时，在这样的平均距离上分子之间会发生相互作用．这时状态方程就不是完全气体的状态方程，气体的热学非完全性是由于分子之间的相互作用的结果．

可以借助考虑压強为零的气体来分开热量关系上的非完全性和热学的非完全性．设压強为零时的內能为 e_0；那末 e_0 便只是温度 T 的函数．按热力学第二定律

$$e(T, v_{sp}) = \int_{\infty}^{v_{sp}} \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_{sp}} - p \right] dv_{sp} + e_0(T), \qquad (14.1)$$

式中 v_{sp} 是气体的比容，卽

$$v_{sp} = \frac{1}{\rho}, \qquad (14.2)$$

括号的下标表示该参数保持不变．一旦给定压強为零（比容无限大）时的內能 $e_0(T)$ 和状态方程，就可以用方程（14.1）计算在任何压強（比容）及温度下的內能．焓只是

$$h = e + pv_{sp}. \qquad (14.3)$$

对于完全气体来说，方程(14.1)中的积分为零，这时內能和焓都与压強无关.

等熵过程无热加入. 所以

$$0 = de + p dv_{sp},$$

或用方程(14.1)，等熵过程的微分方程是

$$\left(\frac{dT}{dv_{sp}}\right)_s = -\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_{sp}}}{\frac{de_0}{dT}}, \tag{14.4}$$

下标 s 表示这个量是对等熵过程计算的. 当等熵过程确定之后，就可以计算伯努利方程(8.2)中的积分了.

声速 a 可以计算如下:

$$a^2 = \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s = -v_{sp}^2\left(\frac{dp}{dv_{sp}}\right)_s = -v_{sp}^2\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_{sp}}\left(\frac{dT}{dv_{sp}}\right)_s + \left(\frac{\partial p}{\partial v_{sp}}\right)_T\right].$$

用方程(14.4)代 $(dT/dv_{sp})_s$，声速平方的最后公式是

$$a^2 = v_{sp}\left[\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v_{sp}}^2}{\frac{de_0}{dT}} - \left(\frac{\partial p}{\partial v_{sp}}\right)_T\right]. \tag{14.5}$$

如果是完全气体，方程(14.5)就变成了方程(1.4)那样的简单形式，声速只是温度的一个函数. 但方程(14.5)却说明声速一般地既决定于气体的温度又决定于密度的.

在分析流场时，方程(14.1)和(14.5)可以提供计算占重要地位的那些物理量的资料，在原则上用这两个方程可以把气体偏离完全气体律的影响确定出来. 实际的计算过程当然是很繁的，得用数值法和图解法. 例如布兹曼(Busemann)([20]，第 421 页)曾提出过怎样构作计算二维超声速流所需要的特征线图. 因为通常偏离完全气体并不大，更合逻辑的办法是采用以完全气体的解作为未扰解的摄动法. 这种办法，钱学森在研究范德瓦耳斯气体的一

维流时曾经用过；艾格斯（Eggers）[22] 处理同样的问题也用过，他用的是贝瑟劳特（Berthelot）状态方程.

A.15. 一般正交坐标系中的运动方程的表达式

一般正交坐标系. 设一般正交坐标系上的一点坐标为 α, β, γ，在该点上在 α, β, γ 增加的方向上三微元线段为 $h_1\,d\alpha$, $h_2\,d\beta$, $h_3\,d\gamma$. 于是弧长 ds 是

$$(ds)^2 = h_1^2(d\alpha)^2 + h_2^2(d\beta)^2 + h_3^2(d\gamma)^2.$$

如果 v_1, v_2, v_3 是速矢 $\mathbf{V}$ 在 α, β, γ 增大的方向上的分量，并 $\nabla \times \mathbf{V}$ 的三分量为 ξ, η, ζ，则

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 h_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 h_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 h_2 v_3)\right]$$

及

$$\xi = \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial\gamma}(h_2 v_2)\right],$$

$$\eta = \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(h_3 v_3)\right],$$

$$\zeta = \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial\beta}(h_1 v_1)\right].$$

梯度的三分量是

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha},\quad \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\beta},\quad \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial\gamma}.$$

应力张量的各分量可以写成：

$$\pi_{\alpha\alpha} = -p + \mu e_{\alpha\alpha} + \left(\mu' - \frac{1}{3}\mu\right)(e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{\gamma\gamma}),$$

$$\pi_{\beta\beta} = -p + \mu e_{\beta\beta} + \left(\mu' - \frac{1}{3}\mu\right)(e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{\gamma\gamma}),$$

$$\pi_{\gamma\gamma} = -p + \mu e_{\gamma\gamma} + \left(\mu' - \frac{1}{3}\mu\right)(e_{\alpha\alpha} + e_{\beta\beta} + e_{\gamma\gamma}),$$

$$\pi_{\beta\gamma} = \pi_{\gamma\beta} = \mu e_{\beta\gamma},\quad \pi_{\gamma\alpha} = \pi_{\alpha\gamma} = \mu e_{\gamma\alpha},\quad \pi_{\alpha\beta} = \pi_{\beta\alpha} = \mu e_{\alpha\beta},$$

式中各 e 用 α, β, γ 增加方向上的 u, v, w 来表示,则为

$$\frac{1}{2} e_{\alpha\alpha} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{w}{h_3 h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \gamma},$$

$$\frac{1}{2} e_{\beta\beta} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{w}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \gamma} + \frac{u}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha},$$

$$\frac{1}{2} e_{\gamma\gamma} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{u}{h_3 h_1}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha} + \frac{v}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \beta},$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{w}{h_3}\right) + \frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{v}{h_2}\right),$$

$$e_{\gamma\alpha} = \frac{h_1}{h_3}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u}{h_1}\right) + \frac{h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{w}{h_3}\right),$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{h_2}\right) + \frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{h_1}\right).$$

动力学方程(2.7)可以写成

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{1}{2}|\mathbf{V}|^2\right) -$$

$$\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V}) = X + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\pi,$$

式中的 X 是彻体力向量, π 是应力张量. $\nabla\cdot\pi$ 的三个分量是:

α 向:

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_2 h_3 \pi_{\alpha\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(h_3 h_1 \pi_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1 h_2 \pi_{\gamma\alpha})\right]$$

$$+ \pi_{\alpha\beta}\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \pi_{\gamma\alpha}\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial \gamma} - \pi_{\beta\beta}\frac{1}{h_1 h_2}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha}$$

$$- \pi_{\gamma\gamma}\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \alpha};$$

β 向:

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(h_2 h_3 \pi_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(h_3 h_1 \pi_{\beta\beta}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(h_1 h_2 \pi_{\beta\gamma})\right]$$

$$+ \pi_{\beta\gamma}\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_2}{\partial \gamma} + \pi_{\alpha\beta}\frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} - \pi_{\gamma\gamma}\frac{1}{h_2 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial \beta}$$

$$- \pi_{\alpha\alpha}\frac{1}{h_2 h_1}\frac{\partial h_1}{\partial \beta};$$

γ 向:

$$\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2h_3\pi_{\gamma\alpha})+\frac{\partial}{\partial\beta}(h_3h_1\pi_{\beta\gamma})+\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_1h_2\pi_{\gamma\gamma})\right]$$
$$+\pi_{\gamma\alpha}\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\alpha}+\pi_{\beta\gamma}\frac{1}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\beta}-\pi_{\alpha\alpha}\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\gamma}$$
$$-\pi_{\beta\beta}\frac{1}{h_3h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\gamma}.$$

柱极坐标. 用坐标 r, ω, x, 使

$$x_1=r\cos\omega,\quad x_2=r\sin\omega,\quad x_3=x.$$

如取 r, ω, x 分别为 α, β, γ, 则 $h_1=1$, $h_2=r$, $h_3=1$, 于是

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_1)+\frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial\omega}+\frac{\partial v_3}{\partial x},$$

$$\xi=\frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial\omega}-\frac{\partial v_2}{\partial x},\quad \eta=\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{\partial v_3}{\partial r},$$

$$\zeta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_2)-\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\omega}.$$

$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ 的三个分量是

r 向: $$u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\omega}+w\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{v^2}{r};$$

ω 向: $$u\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\omega}+w\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{uv}{r};$$

x 向: $$u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\omega}+w\frac{\partial w}{\partial x}.$$

拉普拉斯算子 ∇^2 是

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

定义速度势为

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad v=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\omega},\quad w=\frac{\partial\phi}{\partial x},$$

速度势的方程可以用方程(9.7)写出来.

应变率的各分量是

$$\frac{1}{2}e_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \frac{1}{2}e_{\omega\omega}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \omega}+\frac{u}{r},\quad \frac{1}{2}e_{xx}=\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$e_{\omega x}=\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \omega}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad e_{xr}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial r},$$

$$e_{r\omega}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \omega}.$$

$\nabla\cdot\pi$ 的三分量是:

r 向: $\dfrac{\partial \pi_{rr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \pi_{r\omega}}{\partial \omega}+\dfrac{\partial \pi_{xr}}{\partial x}+\dfrac{\pi_{rr}-\pi_{\omega\omega}}{r}$;

ω 向: $\dfrac{\partial \pi_{r\omega}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \pi_{\omega\omega}}{\partial \omega}+\dfrac{\partial \pi_{\omega x}}{\partial x}+2\dfrac{\pi_{r\omega}}{r}$;

x 向: $\dfrac{\partial \pi_{xr}}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \pi_{\omega x}}{\partial \omega}+\dfrac{\partial \pi_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\pi_{xr}}{r}$.

球极坐标. 用坐标 r, θ, ω, 使

$$x_1=r\sin\theta\cos\omega,\quad x_2=r\sin\theta\sin\omega,\quad x_3=r\cos\theta$$

如分别令 r, θ, ω 为 α, β, γ, 则

$$h_1=1,\quad h_2=r,\quad h_3=r\sin\theta.$$

于是

$$\nabla\cdot\mathbf{V}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_1)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_2\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_3}{\partial\omega},$$

$$\xi=\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(v_3\sin\theta)-\frac{\partial v_2}{\partial\omega}\right],$$

$$\eta=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_1}{\partial\omega}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_3),$$

$$\zeta=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_2)-\frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\theta}.$$

$(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V}$ 的三分量是:

r 向: $u\dfrac{\partial u}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\theta}+\dfrac{w}{r\sin\theta}\dfrac{\partial u}{\partial\omega}-\dfrac{v^2+w^2}{r}$;

θ 向: $u\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{v}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\theta}+\dfrac{w}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v}{\partial\omega}+\dfrac{uv}{r}-\dfrac{w^2\cot\theta}{r}$;

ω 向: $u\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{w}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{wu}{r}+\frac{vw\cot\theta}{r}.$

拉普拉斯算子 ∇^2 是

$$\nabla^2\equiv\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\omega^2}.$$

速度势 ϕ 的定义是

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial r},\quad v=\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta},\quad w=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\omega};$$

速度势的方程可以根据方程(9.7)求出.

应变率的各分量是:

$$\frac{1}{2}e_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\quad \frac{1}{2}e_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{r},$$

$$\frac{1}{2}e_{\omega\omega}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\omega}+\frac{u}{r}+\frac{v\cot\theta}{r};$$

$$e_{\theta\omega}=\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{w}{\sin\theta}\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\omega};$$

$$e_{\omega r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\omega}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{w}{r}\right)$$

$$e_{r\theta}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}.$$

$\nabla\cdot\pi$ 的三分量是:

r 向: $\frac{\partial\pi_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\pi_{r\omega}}{\partial\omega}+\frac{1}{r}(2\pi_{rr}-\pi_{\omega\omega}-\pi_{\theta\theta}+\pi_{r\theta}\cot\theta);$

θ 向: $\frac{\partial\pi_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\theta\omega}}{\partial\omega}+\frac{1}{r}[(\pi_{\theta\theta}-\pi_{\omega\omega})\cot\theta+3\pi_{r\theta}];$

ω 向: $\frac{\partial\pi_{r\omega}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{\theta\omega}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\pi_{\omega\omega}}{\partial\omega}+\frac{1}{r}(3\pi_{r\omega}+2\pi_{\theta\omega}\cot\theta).$

定常轴对称流的禀性坐标系. 令 s 代表沿子午流线的长度，n 代表在子午平面内垂直于流线的长度；r 是离对称轴线的距离．在子午面内的速度矢 $\mathbf{V}_m$ 为两个量所规定：一个是子午面内的分速度值 v_m，另一个是 $\mathbf{V}_m$ 相对于对称轴的斜角 θ. 与子午面垂直的分速度是 v_n. 把 s, n 和圆周方向的 ω 分别当作 α, β 和 γ，并注意，由于对称的缘故，只有对 s 和 n 的导数．于是

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{V}=\frac{\partial v_m\rho}{\partial s}+\frac{\rho v_m}{r}\sin\theta+\rho v_m\frac{\partial\theta}{\partial n};$$

$$\xi=\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_n)}{\partial n},\ \eta=-\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_n)}{\partial s},\ \zeta=-\frac{\partial v_m}{\partial n}+v_m\frac{\partial\theta}{\partial s}.$$

应变率的各分量是:

$$\frac{1}{2}e_{ss}=\frac{\partial v_m}{\partial s},\ \frac{1}{2}e_{nn}=v_m\frac{\partial\theta}{\partial n},\ \frac{1}{2}e_{\omega\omega}=\frac{v_m}{r}\sin\theta;$$

$$e_{n\omega}=r\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v_n}{r}\right),\ e_{\omega s}=r\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{v_n}{r}\right),\ e_{ns}=\frac{\partial v_m}{\partial n}+v_m\frac{\partial\theta}{\partial s}.$$

动力学方程是

$$\begin{aligned}\rho v_m\frac{\partial v_m}{\partial s}-\rho\frac{v_n^2}{r}\sin\theta=&\frac{\partial\pi_{ss}}{\partial s}+\frac{\partial\pi_{sn}}{\partial n}+\pi_{ss}\left(\frac{1}{r}\sin\theta+\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\\&+\pi_{sn}\left(\frac{1}{r}\cos\theta-2\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)-\pi_{nn}\frac{\partial\theta}{\partial n}\\&-\pi_{\omega\omega}\frac{1}{r}\sin\theta+\rho X_s;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho v_m^2\frac{\partial\theta}{\partial s}-\rho\frac{v_n^2}{r}\cos\theta=&\frac{\partial\pi_{sn}}{\partial s}+\frac{\partial\pi_{nn}}{\partial n}+\pi_{sn}\left(\frac{1}{r}\sin\theta+2\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\\&+\pi_{nn}\frac{1}{r}\cos\theta-\pi_{\omega\omega}\frac{1}{r}\cos\theta+\rho X_n;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho v_m}{r}\frac{\partial(rv_n)}{\partial s}=&\frac{\partial\pi_{\omega s}}{\partial s}+\frac{\partial\pi_{n\omega}}{\partial n}+\pi_{\omega s}\left(2\frac{1}{r}\sin\theta+\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)\\&+\pi_{n\omega}\left(2\frac{1}{r}\cos\theta-\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)+\rho X_\omega.\end{aligned}$$

定常二维流的禀性坐标系. 令 s 代表沿流线的长度，n 代表与之垂直的长度．速度矢 $\mathbf{V}$ 为其数值 v 及 $\mathbf{V}$ 对 x 轴的倾角 θ 所

规定。于是

$$\nabla\cdot\rho\mathbf{V}=\frac{\partial\rho v}{\partial s}+\rho v\frac{\partial\theta}{\partial n},$$

$$\zeta=-\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial\theta}{\partial s}.$$

应变率的各分量是

$$\frac{1}{2}e_{ss}=\frac{\partial v}{\partial s},\quad \frac{1}{2}e_{nn}=v\frac{\partial\theta}{\partial n},$$

$$e_{ns}=\frac{\partial v}{\partial n}+v\frac{\partial\theta}{\partial s}.$$

动力学方程是

$$\rho v\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial\pi_{ss}}{\partial s}+\frac{\partial\pi_{sn}}{\partial n}+\pi_{ss}\frac{\partial\theta}{\partial n}-2\pi_{sn}\frac{\partial\theta}{\partial s}-\pi_{nn}\frac{\partial\theta}{\partial n}+\rho X_s,$$

$$\rho v^2\frac{\partial\theta}{\partial n}=\frac{\partial\pi_{sn}}{\partial s}+\frac{\partial\pi_{nn}}{\partial n}+2\pi_{sn}\frac{\partial\theta}{\partial n}+\rho X_n.$$

笛卡尔坐标系. 令笛卡尔坐标系之三坐标为 x, y, z, 相应的分速为 u, v, w. 则连续方程是

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

涡矢的三个分量是

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \eta=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

粘性应力各分量是

$$\tau_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{yy}=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{zz}=2\mu\frac{\partial w}{\partial z}+\left(\mu'-\frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

如 X, Y, Z 为彻体力的三分量，则动力学方程是

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} + \rho w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X$$
$$+ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z},$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho u\frac{\partial v}{\partial x} + \rho v\frac{\partial v}{\partial y} + \rho w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y$$
$$+ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z},$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho u\frac{\partial w}{\partial x} + \rho v\frac{\partial w}{\partial y} + \rho w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z$$
$$+ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}.$$

现在耗散函数 Φ 是

$$\Phi = \mu\left\{2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}$$
$$+ \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2,$$

能量方程是

$$\frac{D}{Dt}(h) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}\right)h$$
$$= Q + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\Bigg]+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}\right.$$

$$\left.+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}\right]+\frac{\Phi}{\rho}.$$

A.16. 参 考 文 献

[1] Stewart, H. J., *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **28** (1942), 161.

[2] Inving, J. H., and Kirkwood, J. G., *J. Chem. Phys.*, **18** (1950), 817.

[3] Chapman, S., and Cowling, T. G., The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. Cambridge Univ. Press, 1939.

[4] Grad, H., *Commun. on Pure and Appl. Math.*, **2** (1949), 331.

[5] Truesdell, C., *J. math. pures et appl.*, **29** (1950), 215—244; **30** (1951), 111—158.

[6] Kantrowitz, A., *NACA Wartime Rept., L457*, 1944; *J. Chem. Phys.*, **14** (1946), 150.

[7] Goldstein, S., Modern Developments in Fluid Mechanics, Oxford Univ. Press, 1938.

[8] Hicks, B. L., *Quart. Appl. Math.*, **6** (1948), 221, 405.

[9] Crocco, L., *Z. angew. Math. u. Mech.*, **17** (1937), 1.

[10] Bjerknes, V., *Z. Meteorol.*, **17** (1900), 97.

[11] Bateman, H., *Proc. Roy. Soc.*, London A125, 598 (1939).

[12] Wang, C. T., *J. Aeronaut. Sci.*, **15** (1948), 675; **17** (1950), 343.

[13] Munk, M., and Prim, R. C., *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **33** (1947), 137.

[14] Hicks, B. L., Guenther, P. E., and Wasserman, R. H., *Quart. Appl. Math.* **5** (1947), 357.

[15] Oswatitsch, K., *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-physik. Kl.*, 88 (1945).

[16] Theodorsen, T., *J. Aeronaut. Sci.*, **4** (1937), 239.

[17] Tollmien, W., *Luftfahrtforschung* **19** (1942), 145.

[18] Crocco, L., *Aerotecnica* **29** (1949), 347.

[19] von Kármán, Th., *J. Aeronaut. Sci.*, **8** (1941), 345.

[20] Busemann, A., Handbuch der Experimentalphysik, Vol. IV, Part 1. Teil, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1931.

[21] Tsien, H. S., *J. Math. and Phys.*, **25** (1946), 301; **26** (1947), 76.

[22] Eggers, A. J., *NACA Rept.*, 959, 1950.

[General Information]
书名=气体动力学基本原理　A编　气体动力学诸方程
作者=钱学森著　徐华舫译
页数=66
SS号=10347140
出版日期=1966年01月第1版

目录